Anwendungsbereiche und Tätigkeitsfelder der Mathematik

Themen-Dossiers der Webseite „Jahr der Mathematik“ des Wissenschaftsjahr 2008.

Zur Herkunft der Texte

Die folgenden Texte zu Anwendungsbereiche und Tätigkeitsfelder der Mathematik stammen von der Webseite: www.jahr-der-mathematik.de zum Wissenschaftsjahr 2008.

Dort sind die Texte als PDF-Downloads im Navigationsmenü zu finden über „Presse“, unter „Themendossiers“ oder direkt auf:

http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/08_Presse/03_Dossiers.html

Zu jedem Themen-Dossier werden dort auch die Ansprechpartner mit Kontaktangaben genannt.

Impressum

Redaktion: Christoph Müller (zib)
(E-Mail: C.Mueller@kit.edu)

Karlsruher Institut für Technologie
Zentrum für Information und Beratung (zib)
Zähringerstraße 65
D-76133 Karlsruhe

2014

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik als Wissenschaft 1
1.1 Mathematik entdecken 1
1.2 Die Forschungslandschaft in Deutschland 1
1.3 Die Geschichte der Mathematik in Deutschland 2
1.4 Mathematik und ihre Anwendungen 3
1.5 Mathematik ist voller Leben – und mitten im Leben 4
1.6 Wissenschaft heute – einige mathematische Probleme unserer Zeit 4

2 Mathematik und Astronomie 6
2.1 Mars und Mathematik 6
2.2 Zufall oder Absicht? 6
2.3 Braune Zwerge und Rote Riesen 7
2.4 Ist der Weltraum endlich? 7
2.5 Crashtests am Himmel 8
2.6 Wie kann man drei Dimensionen verformen? 8

3 Mathematik im Auto 10
3.1 Mit Mathematik lassen sich Autos schneller entwickeln 10
3.2 Mathematik macht Autos besser 11
3.3 Mathematik bringt mehr Komfort in das Auto 12
3.4 Mathematik macht Autos sicherer 13
3.5 Mathematik macht Autos umweltfreundlicher 14

4 Mathematik in Computerspielen 16
4.1 Simulieren mit Hilfe einfacher geometrischer Figuren 16
4.2 Bilder mit Fraktalen minimieren 17
4.3 Raytracing: Gegenstände aus Strahlen berechnen 17
4.4 Den Zufall programmieren 18
4.5 Bewegung simulieren 18
4.6 Virtuelle Schnitzeljagd und Graphentheorie 19

5 Mathematik in der Finanzwelt und im Versicherungswesen 20
5.1 Sichere Vorhersage – das Gesetz der großen Zahl 20
5.2 Risiken mathematisch minimieren 21
5.3 Die Mathematik der Investmentbanken 22
5.4 Mathematische Modellierung für den Ernstfall 23
5.5 Arbeiten mit dem Risiko: das Aktuarswesen 23

6 Mathematik und Industrie 25
6.1 Mathematik härtet ab – Wie Simulationen helfen, Stahl widerstandsfähiger zu machen 25

6.2 Besser Schweißen mit Laserstrahlung – durch Simulation der Wärmewirkung des Lasers 26
6.3 Näher an der Wirklichkeit – Gekoppelte Simulationen führen zu optimierten industriellen Anwendungen 26
6.4 Ein Bild von einem Motor – Beim virtuellen Design entsteht der produktionsreife Motor nur noch im Computer 27
6.5 Die Ruhe im Sturm – Akustisch wirksame Materialien dämmen den Lärm 28
6.6 In Ruhe fahren – Geräusche um den Kopf des Fahrers reduzieren 28
6.7 Robuste Kommunikationsnetze – Telefonieren und Surfen ohne Ende 29
6.8 Mit Licht Geschwindigkeit erhöhen – Halbleiterlaser für die Datenkommunikation .29
6.9 Gut geschnitten – Schnittoptimierung steigert Produktivität in Textil-und Lederverarbeitung 30
6.10 Intelligente Gerätesteuerung – Strom sparen durch Vernetzung 30

7 Mathematik und Kommunikation 32
7.1 Am Anfang war der Fehler 32
7.2 Funktionen als Fingerabdruck 33
7.3 WLAN und GSM störungsfrei 33
7.4 Komprimierungen für MP3, JPG und HDTV 34
7.5 Packen, Falten, Legen – Mathematik im Handy 34
7.6 Mehr Sicherheit am Geldautomaten 35
7.7 Chiffren und Algorithmen auf dem Prüfstand 36
7.8 Optimierung für die Kommunikation von morgen 36

8 Mathematik und Kunst 38
8.1 Wahre Schönheit: der Goldene Schnitt 38
8.2 Genie zwischen Kunst und Mathematik: Albrecht Dürer 39
8.3 Kubismus, Konstruktivismus, Computerkunst 40
8.4 Unmögliche Figuren: die Kunst M. C. Eschers 41
8.5 Treffpunkt im Unendlichen – Mathematik als Motiv 41

9 Mathematik und Medizin 43
9.1 Mit Mathematik Kosten in der Entwicklung von Medikamenten sparen 43
9.2 Klarheit durch Mathematik: größerer Heilungserfolg bei Brustkrebs 44
9.3 Mathematische Modelle beschreiben die Ausbreitung von Krankheiten 44
9.4 Stochastik gibt Handlungsempfehlungen für erfolgreiche ärztliche Therapien 44
9.5 Beispiel Aids: Statistische Analyse von HIV-Stämmen senkt Fehlerrate bei Therapieauswahl 45
9.6 Bildgebende Verfahren: Krankheiten sichtbar machen mit mathematischen Algorithmen 45
9.7 Analysieren und simulieren: mit Mathematik neue Gesichter simulieren 46

9.8 Operationsrisiko berechnen: Fraktale Geometrie bietet Sicherheit 47
9.9 Mathematische Analyse für individuell angepasste Prothesen 47
9.10 Ungestört hören dank Mathematik 47
9.11 Zellen zum Leben erwecken mit Systembiologie und Computeralgebra 48
9.12 Zur Geschichte der Mathematik in der Medizin 48

10 Mathematik und Politik 50

11 Mathematik und Sport 54
11.1 Mathematik im Fußball 54
11.2 Neue Weltrekorde in Peking – alles Zufall? 56
11.3 Tennis ist fair – mathematisch bewiesen 57
11.4 Weiter werfen mit Mathematik 57
11.5 Effizient zum Gipfel 57
11.6 Mathematik und Leichtathletik 57
11.7 Mathe ist fast überall 62

12 Mathematik und Technik 63
12.1 Gut verpackt – Mathematik sorgt für eine optimale Behälterfüllung 63
12.2 Kraftfahrzeug-Filter direkt aus dem Computer 63
12.3 Mathematik in der hohen Kunst des Chip-Designs 64
12.4 Mathematik macht große Daten ganz klein – nicht nur in MP3 64
12.5 Mathematik für mehr Sicherheit – die Simulation der Airbag-Entfaltung 65
12.6 Schneller Surfen im Internet – dank Mathematik 65
12.7 Verformung nach Plan – Mathematik in der Schweißtechnik 65
12.8 Mathematik in der Medizintechnik: Optimierung künstlicher Herzklappen durch Simulation von Blutströmungen im Herzen 66

13 Mathematik in Verkehr und Logistik 67
13.1 Logistikbranche ist drittgrößter Wirtschaftszweig in Deutschland 67
13.2 Navigationssysteme zur Verkehrslenkung und -optimierung 68
13.3 Intelligente Verkehrslenksysteme mit Hilfe der Spieltheorie 68
13.4 Mathematische Methoden reduzieren Wartezeiten der liegen gebliebenen Autofahrer und sparen Pannenfahrzeuge ein 68
13.5 Dispositions- und Konfliktmanagement für eine pünktliche Bahn 69
13.6 Mit Mathematik gegen Wirbelschleppen im Flugverkehr 70
13.7 Optimierter Personennahverkehr am Beispiel der Berliner Verkehrsbetriebe 71
13.8 Weniger Schulbusse durch Optimierung der Schulanfangszeiten 71

14 Mathematik in Wetter- und Klimavorhersage 73
14.1 Wettervorhersage 73

14.2 Vom Wetter zum Klima 74
14.3 Mathematik als gemeinsame Sprache 75
14.4 Mehrgitter- und Mehrskalenverfahren 76
14.5 Der Schmetterlingseffekt 76
14.6 Herausforderungen der Zukunft 76

1 Mathematik als Wissenschaft

1.1 Mathematik entdecken

Mitten im Schwarzwald liegt Oberwolfach. Auf den ersten Blick ahnt man nicht, welche große Bedeutung der kleine Luftkurort für die Mathematik hat. Das Tagungsinstitut in Oberwolfach gehört zu den bedeutendsten Einrichtungen mathematischer Forschungen weltweit. An 50 Konferenzwochen im Jahr wird es zu einer internationalen Begegnungsstätte für Mathematiker. In dem 2.700-Seelen-Ort finden unterschiedliche Veranstaltungen statt: von Seminaren für Doktoranden bis hin zu dem intensiven Abschlussseminar, in dem sich die deutsche Mannschaft auf die Internationale Mathematik-Olympiade vorbereitet. Das Institut verfügt über eine exzellente Bibliothek. Und die ruhige und zugleich anregende Atmosphäre dort hat den Ruf, die Erkenntnis der Wissenschaftler besonders zu fördern. Gerhard Frey und Ken Ribet diskutierten in Oberwolfach beispielsweise wichtige Schritte zum Beweis des Großen Fermatschen Satzes. Oberwolfach ist einer von vielen Orten, an denen in Deutschland Mathematik „gemacht“ wird. Und es ist zugleich ein Ort, an dem für den Beobachter die Faszination von Zahlen und Formeln spürbar wird. Neben dem Tagungsinstitut im Schwarzwald gibt es zahlreiche weitere wissenschaftliche Einrichtungen in Deutschland, die dazu beitragen.

1.2 Die Forschungslandschaft in Deutschland

Im Bereich der reinen Mathematik zählen in Deutschland unter anderem die Standorte Berlin, Bonn, Göttingen, München und Münster zu den Adressen mit Weltruf. In Bonn sind es mit der Universität und dem Max-Planck-Institut gleich zwei Institutionen, die das internationale Ansehen der deutschen Mathematik mitprägen. Das 2006 im Rahmen der Exzellenzinitiative aus der Taufe gehobene Hausdorff Center for Mathematics wird diesem Wissenschaftsbereich in Bonn einen weiteren Schub geben. Mathematische Grundlagenforschung und ausgewählte Anwendungen sollen dort parallel vorangetrieben werden. Der Exzellenzcluster fördert die Vernetzung und Kooperation von Forschungseinrichtungen, um die Spitzenleistungen international noch besser sichtbar zu machen.

Im Bereich der angewandten Mathematik hat sich Deutschland in den vergangenen 20 bis 30 Jahren eine führende Position erarbeitet. Auf verschiedenen Gebieten wie der Numerik, der kombinatorischen Optimierung (die mathematische Methoden zum Beispiel zur exakten Lösung großer Planungs- und Logistikprobleme bereitstellt) und der Finanzmathematik sind deutsche Wissenschaftler maßgebend. Dafür sorgt auch die gute Vernetzung: In Berlin kooperieren zum Beispiel die Mathematikinstitute der drei Universitäten eng mit zwei weiteren Forschungsinstituten für angewandte Mathematik, dem Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS) und dem Zuse-Institut Berlin (ZIB). Als gemeinsames Projekt aller fünf Berliner Institutionen wurde 2001 das Matheon gegründet, ein Forschungszentrum der Deutschen Forschungsgemeinschaft, das sich der „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ widmet. Im Jahr 2006 gründeten die drei Berliner Universitäten darüber hinaus im Rahmen der Exzellenzinitiative von Bund und Ländern gemeinsam die Graduiertenschule Berlin Mathematical School, die seit Herbst 2006 ein gemeinsames Promotionsprogramm für deutsche wie internationale Studierende bereitstellt.

Weitere wichtige Standorte der angewandten Mathematik sind unter anderem das Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig, die Technische Universität München, die Technische Hochschule Aachen, die Universität Bonn, die Universität Heidelberg, das Forschungszentrum Jülich und die Technische Universität Kaiserslautern sowie das Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik in Kaiserslautern und das Fraunhofer Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen in Sankt Augustin. Dabei bauen die Mathematiker in Deutschland auf eine exzellente Infrastruktur. Höchstleistungsrechner der neuesten Generation stehen für Anwendungen des wissenschaftlichen Rechnens zur Verfügung. So betreibt das Forschungszentrum Jülich seit Herbst 2007 den zweit schnellsten zivilen Supercomputer der Welt. Das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) förderte allein im Jahr 2007 31 Projekte im Bereich der angewandten Mathematik durch den BMBF Förderschwerpunkt „Mathematik für Innovationen in Industrie und Dienstleistungen“.

Immer mehr wird auch das Potenzial mathematischer Methoden in den deutschen Unternehmen selbst genutzt: So basieren die Erfolge deutscher Firmen unter anderem auf erstklassiger Forschung in den Unternehmen selbst: Bereiche wie Software und Telekommunikation, Finanz- und Versicherungswirtschaft können heute als „mathematische Industrie“ angesehen werden. Ihr Erfolg beruht zu einem wesentlichen Teil auf erfolgreicher Unternehmensforschung wie auch auf geglücktem Wissenstransfer von Universitäten und öffentlichen Forschungsinstituten in die industrielle Praxis.

Auch jenseits der reinen Mathematik und ihrer Anwendungen verfügt die Wissenschaft rund um Zahlen und Formeln in Deutschland über starke Strukturen. Das Berliner Büro der International Mathematical Union (IMU) ist ein Beleg dafür: Der Dachverband der nationalen Mathematikgesellschaften zog im Jahr 2006 von Princeton nach Berlin.

Die Exzellenz der deutschen Mathematik zeigt sich jedoch nicht nur an dem Ansehen der Spitzenforscher, sondern vor allem auch an der Förderung des Nachwuchses. Damit setzt Deutschland bewusst seine besondere Tradition fort, die das Land schon seit Jahrhunderten mit der Mathematik verbindet.

1.3 Die Geschichte der Mathematik in Deutschland

Große Namen belegen die historische Bedeutung der deutschen Mathematik. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ersann schon im 17. Jahrhundert nicht nur die Analysis, sondern auch das Dualsystem sowie eine Maschine, mit der er mathematische Berechnungen vornehmen konnte. In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war es Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der die Wissenschaft in Deutschland entscheidend voranbrachte. Ihm verdanken wir Fundamentales zur Zahlentheorie, aber auch die Gaußsche Glockenkurve der „Standardnormalverteilung“. Später war es David Hilbert (1862–194 3), der von Göttingen aus die Richtung der Mathematik mitbestimmte: Unter seiner Regie wurde die niedersächsische Universitätsstadt zu einem Weltzentrum der Mathematik. Viele weitere wichtige Namen wie Georg Cantor (1845–1918), Felix Klein (1849–1925), Emmy Noether (1882–1935), Bernhard Riemann (1826–1866), Karl Weierstraß (1815–1897) belegen: In Deutschland hat die Mathematik eine Heimat.

Eine Zäsur stellt die Zeit des Nationalsozialismus dar – für die Mathematik mindestens so gravierend wie für alle anderen Wissenschaften auch. Im Bereich der reinen Mathematik war Deutschland vor dem Zweiten Weltkrieg führend. Durch die Vertreibung und Ermordung jüdischer Mathematiker und die Zerstörung der Strukturen in der Wissenschaftslandschaft während der Zeit des Nationalsozialismus ging diese Führungsposition verloren. Ab den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts gelang es in Deutschland jedoch mit viel Hilfe und Unterstützung aus dem Ausland, eine neue und lebendige Forschungslandschaft aufzubauen.

1.4 Mathematik und ihre Anwendungen

Die Mathematik ist von elementarer Bedeutung für viele Arbeitsfelder. Sie ist die Grundlage aller modernen Naturwissenschaften. Ganz besonders deutlich ist dies in der Physik – zum Beispiel in der Allgemeinen Relativitätstheorie (Theorie der Gravitation) von Albert Einstein, aber auch in der Quantenmechanik und ihren Fortentwicklungen sowie in der Physik der Elementarteilchen. So ist Mathematik die Basis aller ernst zu nehmenden Versuche, Quanten- und Gravitationstheorie gemeinsam zu betrachten und zu verstehen.

Vor diesem Hintergrund wird deutlich, warum schon 1960 der Physiknobelpreisträger Eugene Wigner von der „unerklärbaren Effektivität der Mathematik in den Naturwissenschaften“ sprach. Und diese Bedeutung nimmt stetig zu. Denn mathematische Methoden sind in den letzten Jahren tief in andere Fragestellungen eingedrungen, zum Beispiel in den Bereich der mathematischen Biologie. Das gilt auch für die organische Chemie und die Pharmazie. Auch dass die Sequenzierung des menschlichen Genoms, die vom Human Genome Project für 2010 angepeilt worden war, bereits 2003/2004 abgeschlossen werden konnte, verdanken die Molekularbiologen in wesentlichen Teilen mathematischen Algorithmen. Diese Verfahren waren es, die bei der effektiven Suche von Gensequenzen halfen. Und selbst einfache Röntgenaufnahmen sind heute ohne Mathematik nicht mehr möglich – ganz zu schweigen von Aufnahmen in der Computertomografie und anderen bildgebenden Verfahren. So ist die Mathematik eine Schlüsseltechnologie für den Fortschritt in der Medizin – wie auch in vielen anderen Bereichen.

Die Mathematik ist zu einem wichtigen, aber oftmals wenig sichtbaren Wirtschaftsfaktor geworden. Dies belegt unter anderem die fortschreitende Mathematisierung der Ingenieurwissenschaften. In diesem Bereich wären viele neuartige Produkte, wie etwa die Mobiltelefone der neuesten Generation, nicht möglich. Die Erforschung von Zahlen und Formeln und die Entwicklung moderner mathematischer Methoden sind im digitalen Zeitalter Voraussetzung für moderne Hightech-Produkte und Schlüssel zu immer mehr Innovationen. So steckt hoch entwickelte Mathematik in der GPS-Technologie vieler Navigationsgeräte. Sie sorgt dafür, dass Autofahrer heutzutage auch ohne Ortskenntnis genau an ihr Ziel gelangen. Im Computerzeitalter wird Mathematik in vielen Bereichen benötigt, zum Beispiel bei der Verschlüsselung und Kompression von Daten. Diese Techniken machen den Austausch von Informationen erst möglich. Für die Sicherheitstechnik im Internet und im Bankwesen sowie für die modernen Finanzwissenschaften ist die Mathematik ebenfalls wichtig. Nicht zuletzt spielt die Mathematik auch in der modernen Kommunikationstechnologie eine große Rolle.

1.5 Mathematik ist voller Leben – und mitten im Leben

Mathematik ist fast überall – auch da, wo man sie nicht erwartet. So untersucht das Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik das Fließverhalten von Flüssigkeiten in Babywindeln mit mathematischen Methoden. Ein anderes Beispiel sind die Wettervorhersagen. Normalerweise helfen sie, am Morgen die richtige Kleidung für den Tag zu wählen. Bei Wetterkatastrophen können diese Vorhersagen Leben retten. Dass sich Windgeschwindigkeiten und Temperaturen – und damit zum Beispiel auch der Pollenflug – für mehrere Tage korrekt vorhersagen lassen, beruht auf verbesserten mathematischen Methoden in der Meteorologie. Für mehr Sicherheit beim Autofahren sorgen Crash-Simulationen in der Automobilindustrie. Hier – wie auch bei den Wetterberechnungen – ermöglichen mathematische Kompressionsverfahren des Fraunhofer-Instituts für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen weitere Verbesserungen.

Dank Mathematik kann auch das Klima für mehrere Jahrzehnte modelliert werden. Diese Modellierungen sind eine wichtige Hilfe beim Versuch, die mit dem Klimawandel auftretenden Probleme einzuschätzen, einzudämmen und zu lösen.

Die Mathematik bestimmt unser Leben. Jeden Tag. Oftmals sogar ganz direkt – denn mit Verfahren der kombinatorischen Optimierung können beispielsweise Fahrpläne für den öffentlichen Verkehr erstellt beziehungsweise optimiert werden. Primzahlen bilden den Kern der Verschlüsselungsverfahren, die Internetbanking sicher machen. Die Stabilität von Brücken und Hochhäusern basiert auf Erfolgen der Statik und von mathematischen Methoden in der Werkstoff- und Bauteilsimulation. Dank Mathematik kommt man morgens pünktlich ins Büro. Und auch in der kommerziellen Logistik heißt es: Je mehr Mathematik „drin steckt“, desto effektiver und effizienter wird gearbeitet.

1.6 Wissenschaft heute – einige mathematische Probleme unserer Zeit

Große mathematische Probleme bewegen die Wissenschaftler auf der ganzen Welt. Dazu gehören beispielsweise die „Riemannsche Vermutung“ und „P = NP“. Sie sind zwei der sieben so genannten „Millenniumsprobleme“, für deren Lösung die Clay-Stiftung ein Preisgeld in Höhe von je einer Million US-Dollar ausgelobt hat.

P = NP

Das P = NP-Problem ist ein fundamentales Problem der Komplexitätstheorie. Es fragt, ob man für alle Entscheidungsprobleme (mit Ja/Nein-Antwort), für die man eine Ja-Antwort anhand eines Zertifikats schnell überprüfen kann, auch die Antwort selbst schnell finden kann. Ein Beispiel: Die Antwort auf die Frage des Handlungsreisenden „Gibt es durch die folgenden N Städte eine Rundreise, die kürzer als x Kilometer ist?“ ist entweder Ja oder Nein. Wenn sie Ja ist, kann man dem Handlungsreisenden eine entsprechende Route vorschlagen – das Zertifikat – und der Handlungsreisende kann die Route schnell verifizieren. Aber gibt es auch eine effektive Methode, eine solche Route zu finden? Die Mathematiker glauben, dass die Antwort Nein ist – die Klasse der „in Polynomialzeit berechenbaren Probleme“ P ist nicht gleich der „in Polynomialzeit mit Zertifikat verifizierbaren Probleme“ NP. Und das, obwohl auch schon riesige „Handlungsreisendenprobleme“ mit dem Computer optimal gelöst worden sind.

Das Primzahl-Rennen

Man weiß seit der Antike, dass es unendlich viele Primzahlen gibt – also auch Primzahlen mit beliebig vielen Stellen. Aber das heißt nicht, dass man beliebig große Primzahlen kennt: In der Tat ist die bisher größte gefundene Primzahl $2^{32582657} - 1$, eine Zahl mit 9.808.358 Stellen, die im September 2006 entdeckt wurde. Es läuft weiter ein Rennen, an dem sich viele Menschen und ihre Computer beteiligen – auf der Suche nach einer Primzahl mit mehr als zehn Millionen Stellen: Neben dem Reiz des Rekords lockt dafür auch ein Preis von 100.000 US-Dollar, den die Electronic Frontier Foundation, eine nichtstaatliche Organisation mit Sitz in San Francisco, ausgelobt hat.

Die Riemann’sche Vermutung

Die Riemann’sche Vermutung ist ein zentrales Problem der Mathematik. Die genaue Formulierung ist technisch („Die nicht-trivialen Nullstellen der Riemann’schen Zeta-Funktion haben alle genau den Realteil 1/2“), die

Auswirkungen auf die Zahlentheorie sind weitreichend. Ein Beweis der Riemann’schen Vermutung würde sehr viel genauere Aussagen über die Verteilung der Primzahlen liefern als bisher möglich. Bislang wurde schon bewiesen, dass die „ersten 10 Billionen“ Nullstellen (Verfahren von Odlyzko und Schönhage) und dass „mindestens ein Drittel“ der Nullstellen (Levinson) die Riemann’sche Vermutung erfüllen. Daher gibt es schon jetzt in der Zahlentheorie tausende von Forschungsarbeiten, die unter der Annahme operieren, dass die Riemann’sche Vermutung richtig ist.

2 Mathematik und Astronomie

2.1 Mars und Mathematik

Die Mathematik hinter den Augen der ersten europäischen Marssonde

Seit 2004 gehen spektakuläre Bilder vom Mars durch die Medien. Die dreidimensionalen Aufnahmen stammen von der Mars Express Mission der ESA. Der Satellit war bereits vier Wochen unterwegs, da fiel ein Problem auf: Weil das Solarpanel falsch angeschlossen wurde, stehen dem Satelliten für seine wissenschaftliche Mission nur 70 Prozent der Energie zur Verfügung.

Ein Problem für Gerhard Neukum, Professor am Institut der Geologischen Wissenschaften der Freien Universität Berlin. Er leitete die Entwicklung der hochauflösenden Stereokamera (HRSC) an Bord. Diese Kamera ist gar keine klassische Stereokamera mit zwei Linsen: Neun CCD-Chips scannen permanent den Mars, während der Marssatellit die Oberfläche überfliegt. Weil der oberste Bildstreifen den Mars unter einem anderen Winkel sieht als der unterste, kann man aus den Daten 3D-Bilder rekonstruieren.

Um bei der Übertragung der Bilder Energie zu sparen, hilft den Wissenschaftlern nun seit Monaten ein Spezialgebiet der Mathematik, die Codierungstheorie: Mit ihrer Hilfe können die Forscher die Daten etwas stärker als ursprünglich geplant komprimieren. Auch auf der Erde verwenden die Forscher Mathematik, um aus den Bildstreifen von jeweils 52 km Breite und mindestens 300 km Länge die 3D-Bilder zu rekonstruieren. Diese Arbeit erledigt eine ganze Computerfarm aus Parallelrechnern, die Neukum zusammen mit seinem Team von knapp 50 Wissenschaftlern an der Freien Universität Berlin und am Zentrum für Luft- und Raumfahrt in Berlin-Adlershof zusammengestellt hat.

2.2 Zufall oder Absicht?

Archäoastronomen benutzen Mathematik, um dem Wissen antiker Astronomen auf die Schliche zu kommen.

Wie viel wussten die Menschen der Antike von den Vorgängen am Himmel über ihnen? Wie viel Zufall steckt in der Lage der Steine von Stonehenge und anderer steinzeitlicher Großbauten? Kann man in den Sternmustern auf der Himmelsscheibe von Nebra ein bekanntes Sternbild erkennen? Und dienten die Muster auf den über 3000 Jahre alten Goldhüten von Schifferstadt, Avanton, Ezelsdorf oder Berlin zu mehr als Schmuck?

Solchen Fragen gehen Archäoastronomen nach - mit Hilfe der Mathematik. Mathematische Methoden ermöglichen ihnen die Simulation des Sternenhimmels vor tausenden Jahren, zum Beispiel mit Programmen wie dem Open Source Projekt „Celestia“. Weil Mathematiker Computern beigebracht haben, Pseudozufallszahlen zu erzeugen, obwohl Rechner eigentlich alles andere als zufällig arbeiten, konnte der Archäoastronom

Wolfhard Schlosser (Uni Bochum) 2002 zufällige Muster von Sternen simulieren und mit der tatsächlichen Anordnung der 32 Sterne auf der Himmelsscheibe von Nebra vergleichen. Sein Ergebnis: Die Sternenkonstellation zeigt sehr wahrscheinlich das Siebengestirn, die Plejaden. An der Technischen Universität Berlin arbeitet der Archäoastronom Andreas Fuls. Mit Hilfe von Mathematik – unter anderem mit Methoden der Statistik – erklärt er nicht nur die Ornamente auf den Goldhüten als kalendarische Daten, sondern befasst sich auch mit der Korrelierung des Maya- und des christlichen Kalenders. Die Arbeit des Archäoastronomen ermöglichte eine auf den Tag genaue Datierung von Herrschaftszeiten und Dynastien der Mayakultur, wodurch die bisherige Chronologie um 208 Jahre verschoben wird und damit das Rätsel um den Mayakollaps in ein völlig neues Licht rückt.

2.3 Braune Zwerge und Rote Riesen

Extremfälle der Sternevolution

Sterne leuchten, weil in ihrem Inneren durch Fusionsprozesse Energie frei wird. Oft werden Sterne am Ende ihres Lebens zu Roten Riesen, die schließlich zu Weißen Zwergen verkümmern. Doch es gibt auch Sterne, die nicht schwer genug sind, um solche Prozesse zu zünden, zum Beispiel Braune Zwerge. Diese Zwitter zwischen Planeten und Sternen lassen sich erst seit Mitte der 1990er Jahre dank verfeinerter Beobachtungsmöglichkeiten beobachten und vermessen.

Hier spielt auch die Mathematik eine Rolle: Wissenschaftler wie Pavel Kroupa (Universität Bonn) simulieren, wie Braune Zwerge und andere Sterntypen entstehen. Das Leben der Sterne selbst modellieren zum Beispiel Astrophysiker um Erwin Sedlmayr (Technische Universität Berlin). Sie verwenden numerische Lösungsverfahren zur Lösung der Gleichungssysteme, die die nichtlinearen Gleichungen für Strahlung, Strömung, chemische Prozesse und Materialgleichungen untereinander koppeln. Das ermöglicht Sedlmayr und seinem Team die selbstkonsistente Modellierung der Atmosphären von Sternen, um diese zu erklären und Vergleiche mit den Beobachtungen zu ermöglichen. Ein Ergebnis: Die Beschreibung der Bildung von Festkörperteilchen (zirkumstellaren Staubs) in diesen Atmosphären. Der Staub ist der Anfang der Evolutionskette der Sterne (und Planeten): Er stellt das Baumaterial für Planeten zur Verfügung.

2.4 Ist der Weltraum endlich?

Mathematik beschreibt die Struktur des Alls

Zu den Hauptfragen, die Kosmologen beschäftigen, seit Einstein die allgemeine Relativitätstheorie entwickelt hat, gehört die Frage nach der Geometrie des Alls, seiner „Topologie“ - eine höchst mathematische Frage. Der Messung zugänglich ist die Krümmung des Raumes: positiv gekrümmt sind zum Beispiel Kugeloberflächen, negativ gekrümmt hyperbolische Räume (Sättel) und nicht gekrümmt sind flache Räume. Schon den Mathematiker Gauß beschäftigte die Krümmung von Räumen; er beschrieb den Zusammenhang zwischen der Krümmung von Räumen und der Länge von Strecken auf ihrer Oberfläche in seinem berühmten „theorema egregium“. Kosmologen sind sich heute sicher, dass wir einem sehr schwach gekrümmten Raum, möglicherweise einem flachen Raum leben. Doch dieser Raum muss nicht unendlich ausgedehnt sein, findet etwa der Ulmer Astrophysiker Frank Steiner. Das Universum könnte auch aussehen wie die Oberfläche eines dreidimensionalen Torus. (Das zweidimensionale Pendant eines Torus sieht aus wie ein Schwimmreifen.) Steiner und Mitarbeiter stützen sich auf die aktuellen Vermessungen der kosmischen Hintergrundstrahlung durch das NASA-Projekt Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP).

2.5 Crashtests am Himmel

Wie simuliert man kosmische Teilchenkaskaden in der Atmosphäre?

Ständig rasen Teilchen aus dem Weltall auf die Erde, zum Teil mit Energien, die nicht einmal die größten irdischen Beschleuniger erreichen können. Das macht die Erdatmosphäre zum Experimentierfeld für Astroteilchenphysiker, die das im November 2008 fertig gestellte Pierre-Auger-Observatorium in Argentinien nutzen; für die Zukunft ist ein zweiter Standort in Colorado, USA, geplant. Mit 24 Teleskopen und Detektoren in 1600 Wassertanks, die über eine Fläche von 3000 km² verteilt sind, registrieren die Wissenschaftler in Argentinien Spuren der ausgedehnten Luftschauer, die energiereiche Teilchen beim Flug durch die Atmosphäre hinterlassen.

Gleichzeitig müssen die Forscher aber die Beobachtungen simulieren. Nur so können sie die realen Beobachtungsergebnisse mit ihren Modellen vergleichen. Problem: Die Simulation kann für hohe Energien Jahre dauern, schließlich müssen Milliarden Zusammenstöße und Zerfälle und die Abschwächung der dabei entstehenden Lichtblitze bei verschiedenem Wetter berechnet werden. So greifen die Physiker auf mathematische Tricks zurück: Sie simulieren in Monte-Carlo-Experimenten nur einen Bruchteil der Teilchen mit allen Details; sie beschreiben die Entwicklung der Schauer semi-analytisch mit gekoppelten Differentialgleichungen, wenn die hohe Teilchendichte und der von Beschleunigern her verstandene Energiebereich dies zulassen. Statt Jahren dauern die Simulationen nur noch einen guten Arbeitstag.

2.6 Wie kann man drei Dimensionen verformen?

Mit Mathematik die Bedeutung der Allgemeinen Relativitätstheorie verstehen

Die Beschreibung der Bewegung der Körper im All und deren zeitliche Entwicklung war schon immer Sache der Mathematiker. Doch seit Kepler, Newton und Co. ist die Sache komplizierter geworden. Zwar feiert die Allgemeine Relativitätstheorie bald ihren 100. Geburtstag und die Geometrie, die dahinter steckt, ist sogar noch älter. Doch erst in den letzten Jahren beginnen theoretische Physiker wirklich zu verstehen, was in unserer dreidimensionalen Welt passiert, wenn zum Beispiel Gravitationswellen die vierdimensionale Raumzeit verbiegen. Allgemein gesprochen interessiert sie die Verformung von dreidimensionalen Geometrien. Auf diesem Feld machte die Mathematik in den letzten Jahren ungeheure Fortschritte – nicht von ungefähr wurde Ende 2002 die Poincaré Vermutung bewiesen. Für die Physik bedeutet das heute zum Beispiel: Man kann jetzt erstmals den Zusammenstoß schwarzer Löcher in allen Dimensionen simulieren, oder man versteht, welche der vier (in der Relativitätstheorie gleichberechtigten) Dimensionen der Raumzeit man zur Beschreibung unseres alltäglichen Raumes heranzieht.

3 Mathematik im Auto

Siebzig Millionen Automobile rollen derzeit über den Globus, und jeden Tag werden es mehr. Der weltweite Automarkt ist groß, genauso wie die Konkurrenz unter den Herstellern. Im Wettbewerb um Kunden bringen die Produzenten in immer rascherer Folge neue Modelle auf den Markt. Das ist nur deswegen möglich, weil den Tüftlern und Forschern in den Konzernlaboren heutzutage ein effizienter Helfer zur Seite steht: der Computer. Prall gefüllt mit Formeln und Zahlen unterstützt er die Ingenieure beispielsweise dabei, windschlüpfrige Karosserien und sparsame Motoren zu entwickeln. Anders ausgedrückt: Mathematik macht Autos besser, komfortabler, sicherer und umweltfreundlicher.

Ohne Forschung keine Innovation, das wissen die Autohersteller. Im Jahr 2006 haben Unternehmen des Fahrzeugbaus in Deutschland fast 19 Milliarden Euro für Forschung und Entwicklung ausgegeben – das entspricht mehr als einem Drittel aller Forschungsausgaben des privaten Sektors. Die große Zahl führender Autohersteller und Zulieferer in Deutschland bietet mit ihren Forschungs- und Entwicklungsaufgaben auch Mathematikern ein ideales Betätigungsfeld.

3.1 Mit Mathematik lassen sich Autos schneller entwickeln

Um die Entwicklungszeit der Fahrzeuge zu verkürzen, setzen alle Autohersteller Computersimulationen ein. Beim Design, aber auch bei Crashtests, Fahrwerksabstimmung, Lärmreduzierung und Getriebesteuerung ist der Computer unverzichtbar. Noch bevor das erste Teil eines neuen Autos gefertigt wird, haben die Konstrukteure bereits hunderte Male die Strömung des Fahrtwindes um die Karosserieform berechnet und untersucht, wie sich die Teile bei Zusammenstößen verformen. Auch die Eigenschaften der Rohteile aus Metall und Kunststoff werden bereits am Computer einbezogen. Falls sich hier etwas ändert, können die Ingenieure schnell mit neuen Daten weiter planen.

Bei Crashtests knallt es gewaltig – aber nur am Bildschirm

Gerade bei Crashtests sind Computersimulationen nützlich, da sich mit wenig Aufwand Unfälle mit verschiedenen Autovarianten durchspielen lassen – zum Beispiel um den Einfluss verschieden schwerer Motoren zu ermitteln oder die optimale Dicke von Verstrebungen zu finden. Viele solcher Simulationen sind erst durch anspruchsvolle mathematische Forschung möglich geworden. Denn um ein Auto möglichst präzise im Computer zu erfassen, sind Methoden der numerischen Mathematik und der algorithmischen Geometrie nötig: Zunächst wird das Fahrzeug virtuell mit einem Netz von mehr als einer Million Punkten überspannt. Für jeden Punkt lässt sich eine Gleichung ermitteln, mit der die Verformbarkeit des Fahrzeugteils beschrieben wird. Bei der Simulation eines Unfalls werden dann mit Hilfe einer Spezialsoftware die Gleichungssysteme mit Millionen von Unbekannten gelöst.

Mathematiker stehen bei Computersimulationen aber auch vor ganz praktischen Problemen: Bei 100 bis 150 Testunfällen im Computer entstehen täglich Daten im

Umfang von mehr als 100.000 Gigabyte. Um sie platzsparend zu speichern, müssen die Daten verkleinert werden - mittels neuester mathematischer Software auf bis zu 10.000 Gigabyte. Die Kompression ist so programmiert, dass die wesentlichen Details der Crashtests nicht verloren gehen.

Noch schneller dank Grid Computing

Um aufwändige Computersimulationen zu beschleunigen, nutzen große Unternehmen das so genannte Grid Computing. Bei diesem Verfahren greift man nicht nur auf die Rechenleistung und die Datenbanken des eigenen Computers zu, sondern auf die eines größeren Computernetzwerks. Durch die geschickte Verteilung der Rechenlast lassen sich Leistungen erzielen, zu denen sonst nur Großrechner fähig sind. Dass man noch einen Schritt weitergehen kann, zeigt ein großes europäisches Projekt mit Partnern aus Universitäten und Industrieunternehmen: In Zukunft werden die Entwicklungsingenieure nicht nur die Rechenleistung anderer Computer, sondern auch deren Datenbanken nutzen. So lassen sich zum Beispiel Crashtests simulieren, bei denen die Autos eines Herstellers nicht nur mit den eigenen Fahrzeugen zusammenstoßen, sondern auch mit denen der Konkurrenz. Dadurch werden Autos noch sicherer. Die Mathematik garantiert auch den Schutz des geistigen Eigentums: Mit modernen Verschlüsselungsverfahren lassen sich die Rechen-Grids so aufbauen, dass zwar die Daten aller teilnehmenden Firmen genutzt werden, sich aber nicht speichern lassen. Diese neue, faire Zusammenarbeit unter Konkurrenten ist nur mit Hilfe der mathematischen Kodierungstheorie möglich.

3.2 Mathematik macht Autos besser

Das Automatikgetriebe schaltet glatter und effizienter

Eine der großen Herausforderungen für Mathematiker in der Autoindustrie besteht darin, mittels Software ein automatisches Schaltgetriebe zu simulieren. Zwar gibt es dafür schon Computermodelle, doch die sind entweder ungenau, decken nicht das gesamte Getriebe ab oder versagen oft beim Gangwechsel. Doch gerade diese kritischen Stellen gilt es zu untersuchen, um das Schalten glatter und energieeffizienter zu machen. Mathematiker haben nun erstmals differential-algebraische Gleichungen in die Modelle eingebaut – und so die Simulationsergebnisse deutlich verbessert sowie die Rechenzeit verkürzt. Auch neue Methoden zur Getrieberegelung können auf dieser Basis entwickelt werden.

Die Motoren leben länger

Bevor ein Motor in Serie produziert wird, muss er sich unter Extrembedingungen testen lassen. Aus den Ergebnissen dieser so genannten Stresstests wird abgeleitet, wie haltbar der Motor ist. Meistens lassen ihn die Tester auf einem Prüfstand laufen, um das normale Autofahren nachzustellen – allerdings mit bewusst hoher Last und Drehzahl. Mit Computersimulationen ermitteln Ingenieure zudem kritische Punkte, an denen das Material des Motors besonders anfällig ist, beispielsweise für Risse. Dank Methoden der mathematischen Statistik ergänzen sich mechanische Tests und Computersimulationen: Die Messdaten aus den Prüfständen gehen in die Computersimulationen ein. Und statistische Methoden machen es möglich, die Lebensdauer der Motoren möglichst genau einzuschätzen.

Die Aerodynamik wird besser durch multidisziplinäre Simulation

Bei über 100 Stundenkilometern drückt der Fahrtwind so kräftig auf das Auto, dass sich Teile verformen. Zudem kühlt der Fahrtwind warme Teile ab und erwärmt durch seine Reibung andere Teile. Dadurch ändert sich deren Festigkeit. Die Wechselwirkungen zwischen Elastizität, Wärme und Windströmung waren bisher kaum zu simulieren, da jedes der physikalischen Gebiete eigenen Gesetzen gehorcht – und deshalb unterschiedliche Software für Simulationen benötigt. Mathematiker haben ein Programm entwickelt, das die verschiedenen Computersimulationen verbindet, indem es den Datenaustausch zwischen den einzelnen Softwarepaketen regelt. So leitet etwa die Strömungsberechnung ihre Zwischenergebnisse an die Karosseriesimulation weiter. Diese wiederum berechnet die Verformung des Materials und gibt die veränderte Form für den nächsten Simulationsschritt zurück. Obwohl die Entwickler ihre bisherigen Programme weiter verwenden, entsteht ein Ergebnis, in das Erkenntnisse aller Disziplinen einfließen.

3.3 Mathematik bringt mehr Komfort in das Auto

Das Fahren wird leiser

Je leiser das Auto, desto angenehmer das Fahren. Wie sich Wind-, Motor- und Straßengeräusche aus dem Innenraum verbannen lassen, ist jedoch eine schwierige Frage. Zwar gibt es heute schon Simulationsprogramme, mit denen Autohersteller die Geräuschkulisse im Innenraum testen. Details wie die Form von Bodenblechen oder die Verankerung der Windschutzscheibe lassen sich so optimieren. Doch es dauert lange, die nicht immer präzisen Vorhersagen zu berechnen. Alles in allem sind die Simulationen wenig praktikabel. Mathematiker möchten hier Abhilfe schaffen. Sie haben die komplizierten Gleichungssysteme der Luft-Fahrzeug-Kopplung entschlackt und so die Computersimulationen schneller und präziser gemacht. Dazu mussten sie neue Rechenverfahren entwickeln, denn die alten Methoden vereinfachen die Gleichungssysteme oft so, dass relevante Details verschwinden.

Die Qualität der Oberflächen wird besser geprüft

Die Qualität eines Produktes hängt häufig mit der Qualität seiner Oberfläche zusammen. Bei Autos gibt es viele Oberflächen: Lack, Stoffe für Sitze, Fußmatten, Dachhimmel, Armaturen und Griffe. Ein von Mathematikern entwickeltes System überwacht online die Produktion der dafür nötigen Materialien. Das System besteht aus mehreren Kameras, die das Material filmen und die Bilder an einen Rechner weiterleiten, der sie nach Fehlern absucht. Herzstück der Anlage sind spezielle Algorithmen, die an die Bedürfnisse des Autoproduzenten angepasst sind. Derzeit wird diese Technik bereits bei der Inspektion von Karosserieteilen, Dichtungen und Sitzbezügen aus Leder eingesetzt.

Weniger Staus durch moderne Navigationsgeräte

Wenn das „Navi“ im Auto die schnellste Route berechnet, laufen in seinem Inneren modernste mathematische Rechenverfahren ab. Die Anforderungen sind hoch: Die Auskunft soll schnell und korrekt sein; neuere Navigationsgeräte müssen auch Staus und andere unvorhergesehene Ereignisse berücksichtigen. Viele Staus entstehen zudem dadurch, dass Autofahrer ähnliche Ausgangs- und Zielpunkte haben und durch ihre „Navis“ auf denselben Weg gelenkt werden. Damit das nicht passiert, arbeiten Mathematiker bereits an der nächsten Navi-Generation. Sie untersuchen, wie man Navigationssysteme zur intelligenten Verkehrslenkung einsetzt. Mathematiker haben zusammen mit einem Automobilhersteller Verfahren entwickelt, die den Verkehr auf verschiedene Wege verteilen und so Staus vermeiden.

3.4 Mathematik macht Autos sicherer

Airbags entfalten sich nur im Ernstfall

Airbags retten bei Unfällen Leben. Entfalten sie sich aber durch einen Fehlalarm, können sie Menschen schwer verletzen. Deshalb gibt es strenge Richtlinien zur Funktion von Airbags. Um deren Einhaltung zu gewährleisten, waren bisher teure Crashtests nötig. Wesentlich effizienter ist es, die Entfaltung eines Airbags am Computer zu simulieren. Gekoppelt werden die Tests mit biomechanischen Modellen, um die Wirkung auf den Menschen zu ermitteln. Bis vor kurzem war der Rechenaufwand jedoch unverhältnismäßig hoch. Mathematiker haben daher neue Methoden entwickelt, welche die Luftströmungen beim Entfalten von Airbags simulieren. Die komplexe Faltung und die stark veränderliche Geometrie von Airbags stellen seitdem keine Hindernisse mehr dar.

Fahrassistenzsysteme halten das Auto auf der Straße

Mittlerweile besitzt fast jedes zweite Auto in Westeuropa das elektronische Stabilitätsprogramm ESP. Mit diesem System erkennt das Auto automatisch, wenn es ins Schleudern gerät. Es bremst einzelne Räder ab, bis es wieder sicher auf der Spur fährt. ESP überprüft bis zu 150 mal in der Sekunde, was der Fahrer tut. Dies geschieht mit Sensoren, die unter anderem das Lenkverhalten, die Fahrrichtung und das Verhalten des Motors erfassen. Für die Datenauswertung und die Steuerung der Bremsen wird - natürlich - Mathematik benötigt. Genauso wie bei allen anderen Fahrassistenzsystemen: Bremshilfe, Anfahrhilfe, Tempomat, Spurhaltesystem und Einparkhilfe.

Wegfahrsperren schützen vor Diebstahl

Seit zehn Jahren müssen Neuwagen mit einer elektronischen Wegfahrsperre ausgerüstet sein. Während die erste Generation lediglich elektrische Schalter verwendete, die den Kontakt zu Zündung, Anlasser und Benzinzufuhr kappte, legen heutige Wegfahrsperren die gesamte Motorsteuerung lahm. Nur wenn der richtige Autoschlüssel benutzt wird, kommt der Motor in Gang. Ohne Mathematik wären solche Wegfahrsperren nicht denkbar. Denn theoretisch kann der Informationsaustausch zwischen Schlüssel und Motorsteuerung abgehört werden. Der Schlüssel darf sich deshalb nicht mit einem einfachen Geheimcode ausweisen. Damit der Geheimcode seinen Zweck auch erfüllt, haben Kryptologen das so genannten Challenge-Response-Verfahren entwickelt: Das Auto sendet dem Schlüssel eine Rechenaufgabe, die dieser nur beantworten kann, weil er den entsprechenden Geheimcode besitzt. Der Schlüssel schickt die richtige Antwort zurück, nicht aber den Code.

3.5 Mathematik macht Autos umweltfreundlicher

Die Entwicklung von Rußfiltern wird einfacher

Rußpartikelfilter werden immer häufiger in Serie produziert – vor allem bei Dieselfahrzeugen, um den Ausstoß von Feinstaub zu minimieren. Bislang benötigten Entwickler lange Testreihen mit Prototypen, um die besten Materialien zu finden. Mathematische Simulationssoftware reduziert die Zahl der benötigten Prototypen und spart so Zeit und Geld. Die Software rechnet aus, wie schnell und weit Partikel in beliebige Filtermaterialien eindringen. Da auch erkennbar ist, wo sich Ruß ablagert, lassen sich ungeeignete Filtertypen bereits nach der Simulation ausschließen. Nur wenn ein Filter im Computertest gut abschneidet, wird von ihm ein Prototyp hergestellt.

Besseres Recycling im Innenraum

Um die Fahrgeräusche im Innenraum zu verringern, nutzt man so genannte Absorber. Das sind Materialien wie Filz, Natur- oder Polyesterfasern, aber auch spezielle Schaumstoffe. Sie dämpfen den Lärm. Das Problem: Übliche Dachhimmel bestehen aus verschiedenen Werkstoffen und lassen sich deshalb nur mit hohem Aufwand entsorgen. Mathematikern ist es unlängst gelungen, gleich zwei Probleme auf einmal zu lösen: Mithilfe einer Akustiksimulation entwickelten sie einen Dachhimmel, der zum einen den Lärm deutlich besser dämpft. Zum anderen verwendeten sie im Gegensatz zu herkömmlichen Dachhimmeln einen sortenreinen Werkstoff, der sich sehr gut wiederverwerten lässt.

Mathematiker vernetzen das Wissen der Ingenieure

Autos bestehen aus hunderten Einzelteilen, die miteinander verbunden sind und Kontakt mit Luft und Straße haben. Bei der Fahrt sind alle Teile in Bewegung, sie schwingen und vibrieren; der Wind drückt gegen das Äußere, die Luft im Innern nimmt Geräusche auf, die Reifen rollen, rattern oder gleiten über den Untergrund. Diese Kopplung von Bauteilen und Umwelt macht ein Auto zu einem hochkomplexen physikalischen System. Für jeden Aspekt gibt es Spezialisten, zum Beispiel für Motorbau oder Fahrwerksabstimmung. Diese Experten können die einzelnen Bauteile oder deren Verbindung verbessern. Große Fortschritte sind aber nur möglich, wenn alle Aspekte zusammen optimiert werden: Wenn verstanden ist, wie die Aufhängung der Windschutzscheibe mit den Geräuschen im Innenraum zusammenhängt. Oder wie sich die Karosserie durch den Luftwiderstand bei hohen Geschwindigkeiten verformt. Um diese Zusammenhänge zu erfassen, benötigt man mathematische Modelle – zum Teil völlig neue mathematischen Gleichungen. Erst wenn die Mathematik dieser Modelle einmal verstanden ist, lassen sich gute Simulationsprogramme entwickeln.

4 Mathematik in Computerspielen

Gilt Mathematik meist als trockene und schwierige Materie, so betrachten insbesondere Kinder und Jugendliche Computerspiele als das genaue Gegenteil: Computerspiele gelten als abwechslungsreich, unterhaltsam und einfach zu verstehen. Dennoch: In jedem Computerspiel steckt Mathematik – sogar sehr viel Mathematik. Nur man erkennt es nicht auf den ersten Blick. Um Gegenstände, virtuelle Charaktere, Bewegungen und Landschaften darzustellen, werden Funktionen, Kurven und Gleichungen benutzt: Geometrie und Algebra insbesondere zur räumlichen Darstellung, Analysis und numerische Mathematik für Bewegungsabläufe und zufällige Ereignisse, Graphentheorie und Kombinatorik für Entscheidungen sowie Analysis und Funktionalanalysis zur Bildkompression und Bildcodierung. Das Erzeugen virtueller Realitäten, seien es Schlachten oder Autorennen, oder die Echtzeitkommunikation zwischen oftmals Hunderten oder Tausenden Spielern bauen auf Simulation, schnellen Rechnern und zuverlässigen Verbindungen.

Bei den Spielern sind realitätsnahe sowie intelligent konzipierte und abwechslungsreiche Computerspiele gefragt. Die Mathematik kommt zunächst ins Spiel, um die Figuren zu modellieren. Spielfiguren und virtuelle Gegenstände wie z. B. Autos, Flugzeuge, Häuser oder Schwerter werden aus geometrischen Grundfiguren aufgebaut. Die „Bausteine“ sind unter anderem Würfel, Kugeln oder Zylinder. Die Mathematik bringt die virtuelle Welt auch in Bewegung: Differentialgeometrie und Lineare Algebra helfen, mittels Vektorrechnung Schnitt- und Berührungspunkte zu ermitteln, Streckenlängen, die eine Figur zu gehen hat, zu bestimmen oder die Oberfläche eines Körpers darzustellen. Und damit das Spiel nicht langweilig wird, lassen sich mit Zufallszahlen-Generatoren überraschende Effekte erzielen, indem sich beispielsweise Spielfiguren scheinbar zufällig auf einem virtuellen Schlachtfeld verteilen.

Inzwischen machen sich auch andere Anwendungsbereiche die Vorzüge der Spielkonsolen, also die speziellen Computer, auf denen interaktive Computerspiele gespielt werden, zunutze. Weil diese schnellen Rechner sehr viele Datensätze in kurzer Zeit berechnen können, verwenden Berliner Mathematiker sie, um Blutproben zu analysieren. Ein üblicher Computer mit entsprechender Rechenleistung wäre um ein Vielfaches teurer gewesen.

4.1 Simulieren mit Hilfe einfacher geometrischer Figuren

Simulieren heißt vor allem vereinfachen. Für geometrische Objekte, wie sie in Computerspielen vorkommen, bedient man sich dafür oftmals eines Tricks: Für die Darstellung einer gleichmäßig runden Kugel reicht es beispielsweise aus, den Anschein zu erwecken, als handele es sich um eine solche. Tatsächlich wird mit einem eiförmigen Gebilde oder einem Würfel gearbeitet. Der Würfel muss nur so oft beschnitten werden, dass seine Ecken irgendwann nicht mehr als eckig, sondern als rund wahrgenommen werden. Man spricht hier auch von anmutungstreuer Simulation. Bei einem Zusammenprall zweier Körper zum Beispiel beschränkt man sich auf die Modellierung eines oder weniger Punkte, die sich berühren. Die übrige Figur ist lediglich eine virtuelle Hülle. Die Konturen werden durch Punkte oder vereinfachte Linien (Geraden, Kreisbögen) und einfache Körperformen (z. B. Zylinder) nachmodelliert. Die Programmierer benutzen dafür sogenannte Primitive. Meist sind es Vielecke (Polygone) und hier wiederum in den meisten Fällen das denkbar einfachste: nämlich Dreiecke. Um beispielsweise einen virtuellen Drachen, der sich im Wind bewegt, steigen zu lassen, wird dessen Form in viele kleine Dreiecke zerlegt. Dann muss man nur noch die Tausenden Dreieckspunkte betrachten und ihre Bewegung beschreiben. Die übrigen Punkte dazwischen kann man vernachlässigen. Für computeranimierte Filme benötigt man wesentlich realistischere Darstellungen als für ein Computerspiel. In einem Spiel dagegen kommt es eher auf Schnelligkeit an, damit keine unnötigen Pausen entstehen und der Spieler sich langweilt. Die exakte Berechnung einer komplizierten geometrischen Form würde (zumindest derzeit) noch viel zu lange brauchen. Und der optische Gewinn wäre vernachlässigbar.

4.2 Bilder mit Fraktalen minimieren

Anders als bei der Verarbeitung von Texten im Computer ist für die Erzeugung von Bildern in Computerspielen viel Rechenleistung erforderlich. Oftmals reicht für die Darstellung auf dem Bildschirm allerdings schon ein eher grobes Bild aus, das mit weniger Informationen auskommt. Das funktioniert insbesondere dann gut, wenn sich die Teile des dargestellten Objektes ähneln, beispielsweise bei einer Ziegelmauer als Hintergrundbild für eine Spielszene. Sie sieht an jeder beliebigen Stelle mehr oder weniger gleich oder zumindest ähnlich aus. Das gilt ebenso für die Bäume einer Allee als Kulisse für eine Autorallye: Der dicke Zweig des Baumes ähnelt einem kleineren und dieser wiederum einem noch kleineren. Mathematisch gesehen handelt es sich hierbei um so genannte Fraktale – geometrische Muster, deren Teile dem Ganzen ähnlich sind. Man spricht hier von Selbstähnlichkeit. Mit Hilfe dieser Theorie werden bei der fraktalen Bildkompression Bilder auf einfache geometrische Transformationen wie Drehungen, Streckungen, Stauchungen und Verschiebungen zurückgeführt. Das Knifflige dabei ist, die ähnlichen Bildteile zu ermitteln. Später lassen sich große Teile des Bildes aus den kleinen rekonstruieren, indem die Bildinformationen aus dem komprimierten, also dem codierten Bild herausgelesen werden. Das Verfahren hat einen besonderen Vorteil: Das Bild lässt sich stark komprimieren, und das wieder dekomprimierte Bild ist beliebig skalierbar. Selbst über seine ursprüngliche Größe hinaus ließe es sich exakt darstellen.

4.3 Raytracing: Gegenstände aus Strahlen berechnen

Computerspiele leben von Aktionen. Deshalb ist es meist nicht entscheidend, ob in einer Spielszene das Licht, das eine Lampe in einem Zimmer verbreitet, exakt den physikalischen Gesetzen entspricht. Hauptsache die Schatten, den die Gegenstände werfen, haben annähernd die richtige Form. Inzwischen erlauben aber immer schnellere Algorithmen und Prozessoren auch bei Computerspielen die Anwendung des Raytracings. Es handelt sich dabei um ein Verfahren, das in computeranimierten Filmen bereits eingesetzt wird. Mit Raytracing (dt: „Verfolgen von Strahlen“) kann ein sehr realistisches Bild eines Raumes gezeichnet werden, weil sich Lichteffekte wie Spiegelungen und Brechungen oder auch Schattenwürfe exakt berechnen lassen. Berücksichtigt werden auch die unterschiedlichen Materialeigenschaften der Gegenstände, die in unterschiedlichem Maße Licht reflektieren. Farbe und Helligkeit eines jeden Bildpunktes werden anhand virtueller Strahlen berechnet. Die Strahlen sind hierfür mathematisch gesehen als Geraden dargestellt. Mit Hilfe der analytischen und projektiven Geometrie berechnet man die Schnittpunkte der Geraden und ihre Abstände zueinander.

4.4 Den Zufall programmieren

Wer in einem Taktik- oder Strategiespiel gegen den Computer spielt, wünscht sich einen Gegner, der es einem nicht allzu leicht macht. Der Computer sollte sinnvoll und intelligent auf die Aktionen des Spielers reagieren. Jedes Computerspiel wäre schnell langweilig, falls sich die Reaktionen oder Ereignisse zur sehr ähnelten und womöglich vorhersehbar wären. Ein plötzliches Ereignis dagegen kann eine ganz neue Spielsituation schaffen. Aber wie „lernt" ein Computer zufälliges Verhalten oder das Erzeugen plötzlicher Ereignisse? Wieder hilft die Mathematik. Mathematiker kennen Algorithmen, die scheinbar zufällige Zahlen generieren. Die Programme, die solche Zahlen berechnen, werden Zufallszahlen-Generatoren genannt. Eine einfache Variante nennt sich linearer Kongruenz-Generator: Man gibt eine beliebige, sehr große Zahl – den Startwert – vor, multipliziert diese Zahl mit einer anderen großen Zahl, addiert noch eine dritte hinzu und teilt dann das Ganze durch eine weitere vorher festgelegte Zahl. Vom Ergebnis nimmt man lediglich den Rest – dies ist die erste Zufallszahl –, verwendet diesen als neuen Ausgangswert und wiederholt das Verfahren. Die einzelnen Werte sind streng genommen natürlich berechenbar und wiederholen sich nach einen gewissen Anzahl von Iterationen. Da aber die Zahlen so gewaltig groß sind, ist das kein Problem. Viele Programmiersprachen haben eingebaute Zufallszahlengeneratoren. In der Sprache Java beispielsweise verwendet man als Zahl, durch die geteilt wird, die riesige Zahl 248 = 2 x 2 x 2 x ⋯ x 2 (48-mal), und die Zahl, mit der unser Startwert multipliziert wird, ist gleich 252.149.003.917. Lediglich der Startwert kann vom Computerspiel-Programmierer beliebig gewählt werden.

4.5 Bewegung simulieren

Computerspiele leben von Bewegung. Ob Spieler als virtuelle Sportler die Hürden in einem Wettrennen nehmen oder einen Diskus schleudern, stets werden Bewegungsabläufe dargestellt. Diese gehorchen physikalischen Bewegungsgleichungen und lassen sich mathematisch beschreiben – meistens durch Differentialgleichungen. In der Regel gibt es aber keine einfache Formel, die beispielsweise einen Wert für die Wurfweite ausgibt, sobald Geschwindigkeit, Richtung und die Masse der Wurfscheibe angegeben sind. Besonders kompliziert wird es, wenn mehrere Körper miteinander agieren; beispielsweise wenn beim Billardspiel eine Kugel gleichzeitig auf zwei andere Kugeln trifft. Diese Mehrkörperdynamik ist noch immer eines der schwierigsten mathematischen Probleme und nur für wenige Spezialfälle gelöst. Für einfachere Bewegungen wie Rotationen im dreidimensionalen Raum reicht schon recht simple Algebra aus. Dafür werden unter anderem so genannte Quaternionen benutzt. Dies sind „verallgemeinerte" Zahlen, die sich aus vier gewöhnlichen Zahlen zusammensetzen. Die Rechenregeln sind den uns bekannten Grundrechenarten ähnlich. Mit einer entscheidenden Ausnahme: Die Reihenfolge bei einer Multiplikation ist nicht mehr beliebig. Dies drückt aber nur aus, dass es auf die Reihenfolge bei Drehungen ankommt. Obwohl bereits im 19. Jahrhundert entdeckt, waren Quaternionen anfangs eher von theoretischem Interesse. Für Computerrechnungen sind sie oftmals die praktischere Variante, um Drehungen darzustellen.

4.6 Virtuelle Schnitzeljagd und Graphentheorie

Die Schnitzeljagd ist nicht nur ein Spiel für den Kindergeburtstag, sondern auch für den Computer. Bei einer Variante wird die Schnitzeljagd ins Freie verlegt, und die Spieler agieren mit Hilfe von Laptops, Handys, GPS-Empfängern und anderen mobilen Geräten. Möglich wird diese neue Form von Computerspielen (auch Pervasive Games genannt, etwa: allumfassende Spiele) durch die Technik der „Augmented Reality“ (erweiterte Realität). Die reale Umgebung wird mit einer künstlichen kombiniert und somit erweitert. Virtuelle Bilder überlagern die realen. Ein Problem, das sich bei diesen Spielen im Freien stellt, ist die Standortbestimmung. Beispielsweise dann, wenn Handys über einen größeren räumlichen Bereich hinweg benutzt werden und dabei unterschiedliche Funkzellen verwenden. Die Datenverbindung zwischen diesen Bereichen darf nicht abbrechen, wenn der Spieler von einer Funkzelle in eine andere läuft. Die Berechnung der möglichen Wege, die man im Gelände oder einer rein virtuellen Umgebung gehen darf, stellt eine mathematische Herausforderung dar. Oftmals müssen optimale Wege, d. h. kürzeste oder schnellste Routen, ermittelt werden. Hier kommt die Graphentheorie ins Spiel. Wege werden vereinfacht als geradlinige Streckenzüge mit Ecken, den Kreuzungspunkten, und Kanten dargestellt: die so genannten Graphen. Die Ursprünge der Graphentheorie gehen auf den Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) zurück. Ihm war es gelungen, das „Königsberger Brückenproblem“ zu lösen. Er bewies, dass es keine Route über die sieben Brücken des Flusses Pregel in Königsberg gibt, bei der jede Brücke nur genau einmal überquert wird.

Übrigens: Nicht nur für die Computerspiele selbst, sondern auch beim Design von Computerchips spielt die Graphentheorie eine entscheidende Rolle. Denn sie hilft bei den Berechnungen, wie immer mehr Leiterbahnen auf immer kleinerem Raum untergebracht werden können.

5 Mathematik in der Finanzwelt und im Versicherungswesen

Jeder Mensch ist Risiken ausgesetzt. Diese Feststellung sollte jedoch niemanden dazu verleiten, keinen Fuß mehr vor die Tür zu setzen. Denn das Risiko birgt eine wichtige Eigenschaft: Es ist bis zu einem gewissen Grad kalkulierbar. Ein einfaches Beispiel: Wer sich vor einem Gewitter in ein Haus zurückzieht, muss sich weniger vor Blitzschlag fürchten, als jemand, der zum gleichen Zeitpunkt mit seinem Schlauchboot über einen See paddelt. Risiken lassen sich also in vielen Fällen ebenso gut vorhersagen wie Chancen. Genau dies, also die Berechnung von Chancen und Risiken, ist die zentrale Aufgabe von Versicherungs- und Finanzmathematikern – natürlich in weitaus komplexerer Form als in obigem Beispiel beschrieben.

Wie viele Menschen müssen Policen in welcher Höhe abgeschlossen haben, damit für den Schadensfall die entsprechende Entschädigungssumme gezahlt werden kann? Wie muss ich mein Anlageportfolio gestalten, um eine möglichst hohe Rendite bei gegebenem Verlustrisiko zu erzielen? Ohne ausgefeilte mathematische Methoden wären diese Fragen nicht zu beantworten. Auch und gerade in der Finanzwelt ist Mathematik heute unverzichtbar, sei es für das Risikoma-nagement von Anlagegeschäften, an der Börse beim Wertpapierhandel oder für die optimale Finanzstrategie. Sogar ein eigener Beruf hat sich für die speziellen Anforderungen der Versicherungs- und Finanzmathematik etabliert: der Aktuar/ die Aktuarin.

5.1 Sichere Vorhersage – das Gesetz der großen Zahl

Schäden verursachen Kosten. Oft sind die Geschädigten nicht in der Lage, dafür aus eigener Tasche aufzukommen. Deshalb gibt es Versicherungen, die im Unglücksfall einspringen. Doch: Nach welchen mathematischen Regeln ist es den Anbietern möglich, bei vergleichsweise geringen Prämien der Versicherten hohe Summen im Schadensfall zu zahlen? Das mathematische Prinzip, auf dem die Versicherungsmathematik basiert, ist das „Gesetz der großen Zahl“: Je größer die Anzahl der Ereignisse, desto eher treten bestimmte Fälle genauso häufig ein, wie es theoretisch vom, verwendeten Modell vorausgesagt wurde. Am einfachsten lässt sich das Gesetz der großen Zahl mit Hilfe eines Würfels erklären. Die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl von 1 bis 6 ist beim Würfeln genau gleich – also ein Sechstel. Wird aber zum Beispiel nur fünfmal gewürfelt, kann es durchaus sein, dass drei Zweien dabei sind. Wird jedoch 60.000-mal gewürfelt, dann werden alle Zahlen etwa gleich oft – nämlich rund 10.000-mal – gewürfelt. Auf Versicherungsmathematik übertragen bedeutet dies, dass für eine große Anzahl ähnlich Versicherter die zu leistenden Zahlungen für eintretende Schäden zuverlässig prognostiziert werden können.

Wichtige Zweige der sogenannten Versicherungsmathematik sind die Lebens-, die Schadens- und die Pensionsversicherungsmathematik. Die Lebensversicherung – egal ob als Risiko- oder Kapitallebensversicherung – ist eine der gängigsten Versicherungen. Die Berechnung der Prämie, welche die Versicherten zahlen müssen, hängt vor allem von einer genauen Prognose der später fälligen Leistung ab. Entscheidend ist hierbei das zu erwartende Lebensalter des Versicherten. Im Sinne des Gesetzes der großen Zahl wäre eine solche Prognose einfach. Im Zuge des demografischen Wandels steigt jedoch die durchschnittliche Lebenserwartung der Menschen. Das erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Versicherte das Auszahlungsalter erreichen und die Leistung länger in Anspruch nehmen. Besonders deutlich wird diese Entwicklung unter anderem in der Diskussion über die Finanzierung des Rentensystems.

Für die Versicherungsmathematik entstehen aus den demografischen Veränderungen neue Herausforderungen: Welche Modelle sind geeignet, um beispielsweise die Lebenserwartung der Bevölkerung oder die Entwicklung der Lebensumstände in die Berechnungen einzubeziehen? Mit welchen Finanzprodukten kann das so genannte Langlebigkeitsrisiko abgedeckt werden? Für letzteres werden beispielsweise Langlebigkeitsbonds entwickelt, bei denen die Zinszahlungen von der Anzahl der Menschen einer Altersgruppe abhängen.

5.2 Risiken mathematisch minimieren

Hurrikans an der amerikanischen Ostküste, Ernteausfälle in Australien, Überschwemmungen durch Monsunregen in Indien – für Versicherungen, die letztlich die finanziellen Schäden aus Wetterkapriolen tragen, sind die Risiken unvorhersehbar. Für die Versicherten bedeutet das normalerweise hohe Prämien, mit denen die Anbieter ausreichende Rücklagen für den Ernstfall bilden können. Erhöhte Beiträge verschrecken jedoch viele potenzielle Kunden. Hier sind Versicherungs- und Finanzmathematiker gefragt, nach neuen Methoden zu suchen.

Eine Möglichkeit besteht darin, weitere Investoren an den Anlagerisiken zu beteiligen. Für diesen Zweck wurden und werden Produkte entwickelt, die diese neuartigen Finanzrisiken in Wertpapiere und ähnliche Anlageformen umwandeln, um diese dann einem breiten Anlegerkreis zugänglich zu machen. Tritt der Schadensfall nicht ein, haben alle etwas davon – auch die Anleger.

Große Naturkatastrophen verursachen allerdings oft Schäden mit verheerendem Ausmaß. Die Orkane Lothar (1999) und Kyrill (2007) sowie die großen Hochwasser an Oder (1997) und Elbe (2002) sind Beispiele aus Deutschland, bei denen die Schäden zuvor nicht gekannte Ausmaße erreichten. Da sich die Umstände und Auswirkungen von Naturkatastrophen von Fall zu Fall ändern, können Versicherungsmathematiker sich hier nicht am Gesetz der großen Zahl orientieren. Lösungsansätze bietet die sogenannte Extremwertstatistik, die sich mit dem Schätzen und der Vorhersage der Auswirkungen seltener extremer Ereignisse beschäftigt. Hierbei werden mathematische Höchstleistungen verlangt. Nur relativ wenig Datenmaterial steht den Versicherungsmathematikern für Modellierungen zur Verfügung. Denn es müssen Vorhersagen in Größenordnungen getroffen werden, für die es meist keine vergleichbaren Erfahrungswerte gibt.

Als Sicherheitsnetz für Versicherungen werden hier die Rückversicherungen aktiv – vorausgesetzt, sie wurden abgeschlossen. Rückversicherungen übernehmen Schadensleistungen, die über das übliche Maß hinausgehen. Da die Anbieter dieses Schutzes in der Regel überwiegend Versicherungen als Kunden haben, profitieren sie teilweise vom Gesetz der großen Zahl.

5.3 Die Mathematik der Investmentbanken

Baisse oder Hausse? Bulle oder Bär? In welche Richtung sich die Kurse an der Börse entwickeln mögen – ohne Mathematik funktionieren auch die modernen Finanzmärkte nicht. Dabei ist Finanzmathematik nicht mit dem „kaufmännischen Rechnen“ gleichzusetzen. Vielmehr hilft sie, optimale Investmentstrategien zu bestimmen, das Risikomanagement von Finanzgeschäften zu optimieren sowie Preise, unter anderem von Gütern, Währungen oder Wertpapieren, zu modellieren. Als Initialzündung dieses Wissenschaftszweiges wird die „Theorie zur Bewertung von derivativen Finanzprodukten“ angesehen, die in den 70er-Jahren von Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton entwickelt wurde.

Nach der Einführung der Zinsrechnung hat das „Black-Scholes-Modell“ wie kein zweites die Finanzwelt revolutioniert und damit auch die heutigen wirtschaftlichen Rahmenbedingungen beeinflusst. Als Anerkennung dieser Leistung erhielten Merton und Scholes im Jahr 1997 den Nobelpreis für Ökonomie. Fischer Black war zu diesem Zeitpunkt bereits verstorben.

Der Formel von Black, Scholes und Merton liegt ein denkbar einfaches ökonomisches Prinzip zugrunde: Der Wert eines Produktes wird im Wesentlichen von seinen Produktionskosten bestimmt. Umgesetzt in mathematische Sprache entwickelten die Wissenschaftler aus diesem einfachen Grundsatz ein erfolgreiches Werkzeug zur Bewertung von Finanzoptionen. Dank des Black-Scholes-Modells werden zentrale Problemstellungen beim Optionshandel an den Finanzmärkten für Händler berechenbar. Welcher Wert soll beispielsweise für eine Zahlung vereinbart werden, die erst in Zukunft stattfinden soll, deren Höhe allerdings auch erst – bedingt durch bestimmte Bedingungen oder Kursentwicklungen – zu jenem Zeitpunkt feststeht? Am Beispiel einer „Kaufoption“ auf den Euro-DollarWechselkurs wird der Vorgang deutlich. Dieses Finanzprodukt ist vor allem für Exporteure – wie die Autoindustrie, die ihre Produkte in Dollar verkauft, die Kosten aber in Euro begleicht – interessant. Kommt es zu einem Verfall des Dollarkurses, so sinken die Dollarexporteinnahmen bei gleich bleibenden Eurokosten – der Autohersteller erleidet Verluste.

Eine Kaufoption verhindert dieses Währungsrisiko, indem sie dem Exporteur über einen bestimmten Zeitraum einen festen Wechselkurs zusichert. Sollte der Dollar fallen, wird die Option genutzt und der Verkäufer der Option – typischerweise eine Bank – muss die Wechselkursdifferenz ausgleichen. Bleibt der Dollar über dem zugesicherten Wechselkurs, wird die Option nicht benötigt und verfällt nach Ablauf des festgelegten Zeitraums. Das Wechselkursrisiko trägt die Bank. Für sie lohnt sich das Risiko – sie verdient am Preis für die Kaufoption. Diese Risikoprämie wird so bemessen, dass die Bank die Einnahmen aus dem Verkauf der Option je nach Währungskurs möglichst optimal zwischen Dollar- und Euroanlagen hin und her transferieren kann. Dafür setzen Banken sowohl ein ausgefeiltes mathematisches Modell für die Berechnung der Kursfluktuationen ein als auch Mathematiker, die daraus entsprechende dynamische Strategien für die Kaufoption entwickeln. Als Hilfsmittel werden fortgeschrittene Prinzipien der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik sowie Algorithmen aus Analysis, Numerik und Optimierung herangezogen.

5.4 Mathematische Modellierung für den Ernstfall

Die gegenwärtige Krise an den internationalen Finanzmärkten wird häufig mit „Collaterized Debt Obligations“ (CDOs) in Verbindung gebracht. Diese Finanzprodukte sind deutlich komplexer als Kaufoptionen – deutlich schwieriger ist auch ihre finanzmathematische Bewertung. Das liegt vor allem daran, dass CDOs eine ganze Reihe von Finanzrisiken, häufig Hypotheken, bündeln und umstrukturieren. Auf diese Weise werden CDOs auch für „konservative“ Investmentfonds mit strengen Risikovorgaben interessant. Dabei ist sehr wichtig, die Abhängigkeiten zwischen den Risiken richtig einzuschätzen und diese durch mathematisch korrekte Modellierung zu minimieren. Gute Modelle zur Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen Risikofaktoren sind Gegenstand aktueller Forschung. Ein wesentlicher Faktor, der ehemals bei CDOs ein großes Problem darstellte, war die unzureichende Bonitätsprüfung von Kreditnehmern. Die Kreditgeber waren davon ausgegangen, die eigenen Risiken über CDOs schnell weiterreichen zu können. Dadurch war ein ungewöhnlich hoher Anteil der Kreditbündel mit einem hohen Risiko behaftet, sodass die Bewertung dieser Finanzprodukte nicht mehr korrekt vorgenommen werden konnte. Als dies von den Marktteilnehmern erkannt wurde, erfolgte eine Neubewertung der CDOs. Das führte zu den viel zitierten Abschreibungen in Milliardenhöhe – eine Folge menschlicher Fehleinschätzung, vor der selbst die beste Mathematik nicht schützen kann.

Wenngleich CDOs eine Ursache für Krisen am Finanzmarkt darstellen, überzeugen sie doch durch ihre besonderen Eigenschaften: Sie ermöglichen beispielsweise die Kreditvergabe zu niedrigen Zinsen. Denn sie erlauben mehr Investoren, Geldmittel für Kredite bereitzustellen. Das hat einen überaus positiven volkswirtschaftlichen Effekt.

5.5 Arbeiten mit dem Risiko: das Aktuarswesen

Immer neue mathematische Herausforderungen im Finanz- und Versicherungssektor sind auch ein Grund dafür, dass dabei zunehmend einem Berufszweig ein besonderes Augenmerk zuteil wird: Aktuaren. Neben dem Mathematikstudium durchlaufen diese Spezialisten eine zusätzliche Ausbildung, bei der sie mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Finanzmathematik Fragestellungen analysieren und Lösungen entwickeln.

Eine mehrteilige Fachprüfung bei der Deutschen Aktuarsvereinigung bildet den Abschluss. Aktuarinnen und Aktuare arbeiten hauptsächlich in Versicherungen, Banken und Investmentgesellschaften. Sie sind gleichermaßen zum Nutzen der Kunden wie auch der Unternehmen tätig. Hier gewährleisten sie nicht nur die dauerhafte Sicherheit von Produkten, sondern auch die finanzielle Stabilität der jeweiligen Anbieter.

Bei ihren Berechnungen helfen ihnen an die jeweiligen Gegebenheiten angepasste mathematische Modelle, mit denen sich die Auswirkungen verschiedener Ereignisse möglichst frühzeitig untersuchen und eventuelle Schäden einschätzen lassen. Über die Ergebnisse ihrer Untersuchungen hinaus leisten Aktuare einen entscheidenden Beitrag bei der Gestaltung von Versicherungs- und Finanzprodukten. Nicht zuletzt helfen sie entscheidend dabei, die Vorteile von Finanzinnovationen auch in Zukunft zu sehen, zu verstehen und nutzbar zu machen.

6 Mathematik und Industrie

So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit. Ernst Mach (1838-1916)

Die Technologie macht in unserer modernen Welt immer größere Fortschritte – immer schneller, immer kleiner lautet die Devise. Dabei werden allerdings auch die Strukturen immer komplexer, und die Datenmengen sind oft gigantisch. Die Grenzen der technologischen Entwicklung wären längst erreicht, würden die Probleme nicht mithilfe der Mathematik in überschaubare Einheiten zerlegt. Dabei bleibt die Mathematik oft im Verborgenen, denn die Mathematiker entwickeln in der Regel keine spektakulären neuen Prinzipien in der Technologie, sondern sie ermöglichen mit ihren Modellen erst deren effiziente Nutzung. Die Mathematik liefert die Basis, auf der alles aufbaut, bleibt dabei aber oft unsichtbar. Eine Enquete-Kommission der Amerikanischen Akademie der Wissenschaften kommt zu dem Schluss: Hochtechnologie ist im Wesentlichen mathematische Technologie.

Nicht nur in der Öffentlichkeit wird die Bedeutung der Mathematik für unseren technologisierten Alltag oft unterschätzt, auch Industrievertreter wissen oft nicht, dass ihr Problem eigentlich ein mathematisches ist. Daher sind Kontaktmöglichkeiten wie die Hannover-Messe, bei denen Unternehmen die Mathematik als Werkzeug zur Lösung technologischer Probleme kennen lernen können, ein wichtiger Ausgangspunkt für Kooperationen von mathematischen Instituten mit der Industrie.

6.1 Mathematik härtet ab – Wie Simulationen helfen, Stahl widerstandsfähiger zu machen

Um Stahl widerstandsfähiger gegenüber mechanischen Belastungen zu machen, haben Schmiede früher das heiße Eisen in kaltes Wasser getaucht. Heute ist das Härten von Stahl eine Wissenschaft für sich. Erhitzt wird nicht mehr mit Feuer, sondern zum Beispiel mit einem Laserstrahl. Mathematische Simulationen tragen dazu bei, Stähle optimal zu härten – insbesondere Bauteile mit komplizierter Geometrie.

Durch Erhitzen und Abkühlen ändert Stahl seine atomare Gitterstruktur, er geht in eine andere „Phase“ über, wie die Experten sagen. Ist die Temperatur dabei zu hoch, kann der Stahl schmelzen. Bei zu niedriger Temperatur bleibt der Stahl zu weich und ist nicht belastbar.

Das Problem ist, dass man innen im Stahl die Temperatur nicht messen kann. Mathematiker können sie jedoch abhängig von der Oberflächentemperatur genau berechnen. Bei einfachen Bauteilen ist das nicht besonders schwierig, schließlich ist die Physik von Stahl und dessen Wärmeleitfähigkeit sehr gut verstanden. Anders ist das jedoch bei komplizierteren Bauteilen. In Zylinderköpfen von Automotoren befindet sich beispielsweise ein Metallblock mit einer Bohrung darin. Da Stahl Wärme sehr gut leitet, kühlt er nach der Laserbehandlung schnell ab, die Wärme geht dabei ins Innere des Bauteils. Nur: Wo eine Bohrung ist, also ein Loch, ist kein Metall mehr, das die Wärme ableitet, und die

Hitze ist plötzlich in einem dünnen Steg gefangen. An der dünnen Stelle muss also die Leistung des Lasers herunter geregelt werden.

Dank der Simulation berechnet das Programm des Weierstraß-Instituts für jede Stelle die Oberflächentemperatur, die der Laser hervorrufen muss, damit die Einhärtetiefe auf dem gesamten Bauteil gleichmäßig ist. Eine Regelanlage führt den Laser dann so über das Bauteil, dass die eingestellte Temperaturkurve nachvollzogen wird.

6.2 Besser Schweißen mit Laserstrahlung – durch Simulation der Wärmewirkung des Lasers

Das Schweißen oder Fügen mit Laserstrahlung findet in den verschiedensten Bereichen Anwendung: vom Schweißen größerer Bauteile im Automobil-und Maschinenbau bis zum Mikrofügen in der Elektronik oder Medizintechnik. Die Qualität der Schweißverbindung hängt direkt von der Wärmewirkung des Lasers ab. Die Vorab-Simulation der beim Schweißen auftretenden Temperaturen ist im Vergleich zum Experiment ein effektives und kostengünstiges Werkzeug, um die Qualität der Schweißnaht zu bestimmen. In der Simulation wird die Wärmewirkung des Lasers durch eine parametrisierte Wärmequelle abstrahiert.

Die Optimierung der Parameter hinsichtlich der Differenz von experimentellen und simulierten Daten wird als inverses Problem bezeichnet und erfordert die vielfache Lösung eines aufwändigen mathematischen Modells. Gängige mathematische Hilfsmittel versagen bei dieser Vorgehensweise, da die Berechnung auch bei Verwendung modernster Rechenanlagen zu zeitintensiv ist. Wissenschaftler des Fraunhofer-Instituts für Lasertechnik und Mathematiker der RWTH Aachen entwickeln numerische Methoden, um die Ordnung der Modelle so weit wie möglich zu reduzieren. Diese Modellreduktionsverfahren verkürzen die Rechenzeiten drastisch. Außerdem werden Optimierungsverfahren entwickelt, um die Parameter verlässlich bestimmen zu können. Langfristiges Ziel ist die Anwendung dieser Methoden zur Entwicklung von Echtzeitmodellen, die die Temperaturen während des Schweißens berechnen und die Regelung des Schweißprozesses in Echtzeit ermöglichen.

6.3 Näher an der Wirklichkeit – Gekoppelte Simulationen führen zu optimierten industriellen Anwendungen

Noch immer ist der elegante Flug der Vögel das große Vorbild für den Flugzeugbau, denn ihre Flügel können sich den verschiedensten Situationen anpassen. Bei Flugzeugen sind die Tragflächen dagegen nur auf einen bestimmten Zustand hin optimiert –beispielsweise die Reiseflughöhe und die Reisegeschwindigkeit. In allen anderen Situationen ist der Flügel nicht optimal. Könnte man die Tragflächen von Flugzeugen verformbar gestalten, ließe sich beispielsweise der Kraftstoffverbrauch deutlich reduzieren.

Um zu erforschen, wie genau sich die Flügel der Vögel an die Flugsituation anpassen, simulieren die Wissenschaftler den Flug am Computer. Mit Hilfe aufwändiger Berechnungen vollziehen sie die Bewegung der Flügelknochen nach. Ebenso simulieren sie die Strömung der Luft um den Flügel herum. Beide Simulationen für sich haben die Wissenschaftler schon länger gut im Griff. Kompliziert wird es besonders dadurch, dass beide Bereiche miteinander in Wechselwirkung treten: Einerseits verformt die Strömung den Flügel, und andererseits beeinflusst der verformte Flügel seinerseits die Strömung. Zwei physikalische Systeme sind hier eng miteinander verwoben; und man kann die Veränderungen in dem einen Bereich nicht verstehen, so lange der andere nicht ebenfalls in das Modell eingebunden ist.

Viele komplexe Prozesse können Ingenieure und Forscher nur untersuchen, wenn sie mehrere Phänomene kombiniert am Computer simulieren. Dies ermöglicht eine Software des Fraunhofer-Instituts für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI, die dafür sorgt, dass Simulations-Programme für verschiedene physikalische Phänomene ihre Daten miteinander austauschen können. Bei solchen gekoppelten Simulationen beeinflussen die errechneten Werte den Fortgang aller Simulationen.

Dieses Prinzip spielt auch bei flexiblen Windrädern mit optimierten Flügeln eine wichtige Rolle. Das Konzept beruht auf Windrädern, die sich passiv an den Wind anpassen und so die Belastung vermindern. Denn der Luftstrom versetzt den Rotor nicht nur in die gewünschte Drehbewegung, sondern verformt ihn auch –im schlimmsten Fall kollidiert der Flügel mit dem Turm, an dem er befestigt ist. Um die Energieausbeute zu optimieren und Unfälle durch verformte Windräder zu vermeiden, setzen die Entwickler auf gekoppelte Simulationen für die Luftströmung und die Verformung der Flügel.

6.4 Ein Bild von einem Motor – Beim virtuellen Design entsteht der produktionsreife Motor nur noch im Computer

Wie muss ein Elektromotor aussehen, der besonders leise ist? Die Ingenieure des Instituts für Elektrische Maschinen der RWTH Aachen können mit ihren Simulationen zeigen, bei welchem Entwurf ein Motor besonders laut brummt, oder wann er besonders energieeffizient arbeitet. Laute Geräusche kommen dadurch zustande, dass sich das Gehäuse unter Einfluss des elektromagnetischen Feldes verformt. Es kommt zu Schwingungen im Mikro-oder Nanometerbereich, die zwar nicht sichtbar sind, aber hörbar.

Der Auftraggeber kann den Wissenschaftlern der RWTH ganz genau sagen, was er von seinem Motor erwartet, zum Beispiel, dass er keine hohen Töne von sich gibt oder eine gewisse Lautstärke nicht übersteigt. Für den Entwurf sind keine Experimente mehr nötig, der komplette Motor wird bis zur Produktionsreife am Computer entworfen.

Damit die Entwickler das komplette Design virtuell erstellen können, müssen sie in einem zweiten Schritt die gewonnenen Simulationsergebnisse in dreidimensionale Bilder übersetzen. Die Verarbeitung der riesigen Datenmengen ist dabei ebenso aufwändig wie die eigentliche Simulation.

Ein Prototyp wird dann nur noch gebaut, weil ein realer Motor immer noch überzeugender ist. Das Design muss in der Regel nicht mehr verändert werden –es sei denn, der Auftraggeber wünscht nachträglich nicht nur reduzierte Geräusche, sondern auch Energieeffizienz.

Ihre Kompetenzen beim virtuellen Design von Elektromotoren bringen die Wissenschaftler der RWTH Aachen derzeit in das BMBF-Projekt „e performance“ ein, bei dem sie gemeinsam mit den Partnern Audi und Bosch ein neuartiges leistungsfähiges Elektroauto entwickeln.

6.5 Die Ruhe im Sturm – Akustisch wirksame Materialien dämmen den Lärm

Trotz immer leiserer Motoren ist der moderne Alltag oft sehr laut. Daher müssen Geräusche im Nachhinein reduziert werden. Zur Lärmdämmung werden poröse Materialien wie Glas und Mineralwolle oder Schäume eingesetzt. Um die Materialparameter zu bestimmen, bei denen ein Bauteil besonders große akustische Wirksamkeit entfaltet, werden meist nach wie vor aufwändige und teure Messungen an Rohlingen und Prototypen durchgeführt.

Am Fraunhofer-Institut für Techno-und Wirtschaftsmathematik ITWM werden seit Jahren Verfahren entwickelt, um diesen hohen Zeit-und Kostenaufwand bei der Neuentwicklung von Absorbermaterialien drastisch zu reduzieren. Von zentraler Bedeutung ist dabei, dass alle Materialparameter, welche die akustischen Eigenschaften des Materials bestimmen, nicht gemessen, sondern vollständig berechnet werden. Ausgangspunkt ist ein stochastisches Modell, das die Mikrostruktur des Materials wirklichkeitsnah abbildet.

6.6 In Ruhe fahren – Geräusche um den Kopf des Fahrers reduzieren

Wenn es schon nicht möglich ist, dass ein Auto völlig geräuschlos fährt, so lassen sich doch die Geräusche um den Kopf des Fahrers noch weiter reduzieren. Dafür muss eine ganze Reihe von Einflussparametern genau richtig gewählt werden. Früher wurde dazu ein Modell gebaut, in dem man mit viel Erfahrungswissen einzelne Parameter variiert und sich das Ergebnis im Versuch angeschaut hat. Dabei ist jedoch jede Variation zeitaufwändig und teuer.

Nach derzeitigem Stand der Forschung bedient man sich meist der Numerischen Simulation, bei der man das Fahrzeug im Rechner modelliert und dann die Parameter variiert. Dabei müssen zahlreiche physikalische Effekte wie Luftströmung um das Fahrzeug, Vibrationen der Karosserie, Geräuschentwicklung des Motors und Schallausbreitung im Innenraum berücksichtigt werden. Die Rechnungen sind sehr aufwändig und dauern auch auf großen Rechnern mehrere Stunden bis Tage.

In einem Projekt des DFG-Forschungszentrums Matheon mit der Firma SFE Gesellschaft für Strukturanalyse in Forschung und Entwicklung mbH verwenden die Mathematiker die automatisierte Optimierung, bei der im Hintergrund zahlreiche Simulationen ablaufen. Dabei werden die großen genauen Modelle auf kleinere Modelle dezimiert, die aber immer noch die für die Optimierung wesentlichen Informationen enthalten. Mit dieser Herangehensweise erreichen die Forscher erhebliche Kosten-und Zeitersparnisse, aber dennoch ein optimales Ergebnis.

6.7 Robuste Kommunikationsnetze – Telefonieren und Surfen ohne Ende

Die weltweiten Telekommunikationsnetze müssen immer mehr Informationen transportieren. Nicht nur die ständig steigende Zahl von Teilnehmern lässt die Datenmengen explodieren, sondern auch immer neue Anwendungen, wie Internetfernsehen oder interaktive Spiele im Internet.

Damit man auch zu Stoßzeiten telefonieren und im Internet surfen kann, ohne dass die Netze zusammenbrechen, müssen genügend Glasfaserkabel bereitstehen. Die Planer eines Kommunikationsnetzes stehen vor ganz konkreten Fragen wie: Wie viele Glasfaserkabel braucht man zwischen Berlin und Hamburg? Um das entscheiden zu können, ziehen sie Nachfragetabellen heran, aus denen sie eine Schätzung ableiten. Bislang beruhen diese Schätzungen auf Mittelwerten, die nicht die Schwankungen des Verkehrsaufkommens berücksichtigen. So kann es immer wieder zu Überlastungen kommen.

In dem BMBF-Projekt „Robuste Kommunikationsnetze (ROBUKOM)" entwickeln Mathematiker derr RWTH Aachen gemeinsam mit Nokia Siemens Networks und dem Deutschen Forschungsnetz (DFN-Verein) nun Methoden, um auch diese Schwankungen in die Schätzung mit einzubeziehen. Die Kommunikationsnetze sollen so konfiguriert sein, dass sie robust gegenüber großen Belastungen und Ausfällen einzelner Komponenten sind. Da die Netze gleichzeitig kostengünstig angelegt werden müssen, dürfen auch keine großen Überkapazitäten eingeplant werden. Neben der Anzahl der Glasfaserkabel beziehen die Mathematiker alternative Wege für den Datentransport ein, die bei großer Belastung einer Trasse genutzt werden können –bei den heutigen Übertragungsgeschwindigkeiten spielen Umwege fast keine Rolle mehr.

6.8 Mit Licht Geschwindigkeit erhöhen – Halbleiterlaser für die Datenkommunikation

Die Welt moderner Computernetzwerke ist zweigeteilt. Erzeugt und verarbeitet werden die Daten im Computer als elektronische Signale, bei der Übertragung der Daten werden meist optische Signale durch Glasfasern gesendet. An der Schnittstelle zwischen der Welt der Elektronik und der Photonik steht eine spezielle Klasse von Hochleistungsbauelementen.

Hier kommen oft spezielle Halbleiterlaser zum Einsatz, die in Bereichen von Datenraten von 40 Gigabit pro Sekunde und mehr Datensignale umwandeln oder regenerieren, Pulse erzeugen und vieles mehr. Eine Perspektive für eine noch schnellere Datenkommunikation bietet dabei die Aussicht, neben der reinen Datenübertragung immer mehr Funktionen in den optischen Bereich zu verlagern.

Wissenschaftler des Berliner Weierstraß-Instituts simulieren und analysieren dynamische Effekte in Halbleiterlasern. Die Mathematiker können durch ihre Simulationen Regeln zum Design der Bauelemente angeben, um gewünschte dynamische Effekte zu erzielen, und kommen so auch zu ganz neuen Konzepten für spezielle Bauteile.

Für die mathematische Beschreibung dieser komplexen und winzig kleinen Strukturen – in einem Maßstab von Nanometern bis zu Mikrometern –müssen die Mathematiker nicht nur die fundamentalen physikalischen Zusammenhänge bis hin zu Quanteneffekten berücksichtigen, sondern auch modernste Methoden aus der mathematischen Theorie der dynamischen Systeme verwenden und weiterentwickeln.

6.9 Gut geschnitten – Schnittoptimierung steigert Produktivität in Textil-und Lederverarbeitung

Ein Maßanzug besteht aus über 50 Einzelteilen. Diese Teile so auf einer Stoffbahn anzuordnen, dass möglichst wenig von dem teuren Material verschnitten wird, ist eine Kunst. Im Handwerk sowie in der Textil-und Lederindustrie sind solche Verschnittprobleme tägliche Praxis. Mathematiker vom Fraunhofer-Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI haben eine Software entwickelt, mit der sich automatisch Schnittbilder auf Textilien erstellen lassen. Das Programm verschachtelt die Formen der Einzelteile, indem es in mehreren Schritten die Anordnung verbessert. Dazu nutzt es unter anderem Greedy-Verfahren. Das englische greedy steht für gierig –das Verfahren verfolgt ähnlich wie ein gieriges Tier in jedem Schritt nur den jeweils erfolgversprechendsten Weg. Das macht dieses Vorgehen sehr schnell. Denn oft steht nur wenig Zeit zur Verfügung.

Bei Leder kommt noch ein anderes Problem hinzu. Dort heißt die Frage nicht einfach: Geht der Sessel oder die Lederhose auf die Kuhhaut? Als Naturprodukt weist Leder qualitativ unterschiedliche Partien auf. Mit einer eigenen Software für Lederschnittbilder kann der Benutzer die stärksten Stücke etwa für die strapazierte Sitzfläche vorsehen. Um die Löcher im Leder macht das Programm automatisch einen möglichst kleinen Bogen.

Auch für andere Optimierungsfragen in der Industrie haben Mathematiker Lösungen entwickelt, mit denen sich zum Beispiel der Zuschnitt von Holz-und Metallplatten, eine möglichst dichte Bauteilanordnung im Motorraum von Autos oder eine verbesserte Belegung von Computerplatinen berechnen lassen.

6.10 Intelligente Gerätesteuerung – Strom sparen durch Vernetzung

Erneuerbare Energien sind weiterhin im Aufwind. Den unbestrittenen Vorteilen im Blick auf Umweltaspekte steht jedoch ihr nur sehr begrenzt planbares Verhalten entgegen. Sonnen und Windenergie ergänzen sich zwar im Jahresverlauf hervorragend – aufgrund regeltechnischer Probleme werden aber zunehmend Windkraftwerke abgeschaltet. Wertvolle Energie wird so nicht genutzt.

Im Projekt „mySmartGrid“ entwickelt das Fraunhofer-Institut für Techno-und Wirtschaftsmathematik ITWM in Kaiserslautern intelligente Steuerungssysteme. Diese passen den Energieverbrauch der Erzeugung an.

Das Programm mySmartGrid ermittelt zunächst aus Sonnen-und Windprognosen die für eine Nutzung günstigen Zeiten. Danach bündelt es viele Haushaltsgeräte zu einem virtuellen Verbraucher. Eine Gefriertruhe kann problemlos einig Stunden ohne Strom aus-kommen und genau dann kühlen, wenn gerade viel erneuerbarer Strom vorhanden ist. Die Temperatur kann dann stärker abgesenkt werden als eigentlich nötig, um anschließend wieder lange ohne Strom auszukommen.

Schlüssel für diese Technologie ist die statistisch signifikante Bündelung der Stromnachfrage von vielen Privathaushalten. Dazu werden Energiemanager in den Haushalten installiert. Diese Geräte kennen die aktuelle Situation auf dem Strommarkt und können verschiedene Haushaltsgeräte steuern. Über Geräteadapter können die Endgeräte, wie Tiefkühltruhen oder Wärmepumpen, gesteuert werden.

Wenn viel Strom auf dem Markt vorhanden ist, kann man diesen billiger einkaufen. Wenn umgekehrt wenig Strom vorhanden ist, ist es günstiger, den Stromverbrauch zu reduzieren – teure Kraftwerke müssen nicht hochgefahren werden. Diese Verfahren sind bei großen Stromabnehmern lange etabliert und werden auf das Projekt mySmartGrid übertragen: Die gesamte Nachfrage der Projektteilnehmer wird gebündelt am Strommarkt gehandelt. Die dabei entstehenden Gewinne kommen dem Verbraucher zugute.

7 Mathematik und Kommunikation

Ob beim Telefonieren mit dem Handy, beim Geldabheben am Automaten oder beim Anhören einer CD – in der Kommunikation mit oder mit Hilfe von Maschinen erleichtern uns mathematische Anwendungen, oft unbemerkt, das Leben Tag für Tag. Vor rund 60 Jahren erforschte der amerikanische Mathematiker und Ingenieur Claude Elwood Shannon die wissenschaftliche Verbindung der beiden Disziplinen: Seine berühmte Theorie zur Kommunikation beruht auf Vorarbeiten seines Kollegen Norbert Wiener und ist noch heute maßgeblich, wenn man die Übertragung von Informationen untersuchen will. In dem später so genannten Shannon-Weaver-Modell wird die Information von einem Sender kodiert, auf einem Kanal übertragen, dabei mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit – zum Beispiel durch Rauschen – gestört und schließlich vom Empfänger dekodiert.

Doch wie werden Daten dabei am besten verschlüsselt? Und wie können Störfaktoren bei der Übertragung klein gehalten werden? Antworten liefert hier die Kodierungstheorie, ein Teilgebiet der Mathematik, ohne das weder das Tsunami-Frühwarnsystem im Indischen Ozean funktionieren würde noch ein Telefon – ganz zu schweigen von den meisten Multimediaprodukten, die auf der Internationalen Funkausstellung zu sehen sind. Oft muss die Mathematik obendrein Datenmassen komprimieren, um diese zu bändigen. Auch diesen Vorgang ermöglichen die Algorithmen der Kodierungstheorie.

Ein anderes Teilgebiet der Mathematik hilft, die Informationen bei der Übertragung zu schützen. Dafür ist die Theorie der Verschlüsselung zuständig, die Kryptologie. Public-Key-Verfahren etwa – Standardverfahren zur Verschlüsselung – wurden von den Mathematikern Whitfield Diffie, Martin Hellman und Ralph Merkle zu Beginn der 1970er-Jahre erfunden. Einen Schritt weiter gingen 1977/78 die Mathematiker Ron Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman. Sie erdachten den nach den Anfangsbuchstaben ihrer Nachnamen benannten RSA-Algorithmus – das erste konkrete Verschlüsselungsverfahren und heute die Standardverschlüsselung beim Datenverkehr im Internet.

Mathematiker sind zu guter Letzt auch gefragt, wenn es um die so genannte Optimierung geht – etwa die Verteilung von Handyfunkstationen oder -frequenzen.

7.1 Am Anfang war der Fehler

Kommunikation ist mehr als nur Reden und Zuhören, Senden und Empfangen – Störungen gehören meist auch dazu. Das gilt für nahezu jede Form der Datenübertragung: vom Satelliten, der Informationen in Richtung Erde sendet, über den Computernutzer, der über WLAN surft, bis zu den Unterwassersonden des Tsunami-Frühwarnsystems, die ihre Daten mehrere Kilometer weit durch das Wasser schicken. Die entscheidende Frage ist hier, wie sich diese Fehler minimieren oder sogar vollständig beheben lassen.

Eine sehr einfache Idee besteht darin, die Daten zu kopieren und mehrmals zu senden. Das Problem: Dieses Verfahren ist nicht besonders effektiv. Wenn man Informationen zur Sicherheit gleich mehrmals übertragen will, dann bläht man die Menge der gesendeten Daten damit unnötig auf. Eine bessere Idee hatten die Mathematiker Irving S. Reed und Gustave Solomon. Sie entwickelten 1960 die Reed-Solomon-Kodierung, die heute unter anderem in DSL-Übertragungen und in DVD-Playern angewendet wird. Reed-Solomon-Codes korrigieren darüber hinaus Fehler in der Datenübertragung zu Satelliten, zum Beispiel beim Voyager-Programm, das an den Grenzen unseres Sonnensystems Daten sammelt. Die Voyager-Daten sind über einen halben Tag unterwegs, bis sie auf der Erde ankommen – viel Zeit, um durch den so genannten Sonnenwind mit seinen aufgeladenen Teilchen oder durch Magnetfelder gestört zu werden.

7.2 Funktionen als Fingerabdruck

Die Reed-Solomon-Kodierung nutzt Funktionen: Zu beliebigen Zahlen wird sehr schnell eine Art mathematischer Fingerabdruck bestimmt. Will man nun jemandem die Zahlen schicken, dann reicht es, ihm lediglich die Funktion zukommen zu lassen – denn damit kann der Empfänger die Zahlenreihe rekonstruieren. Die Datenmenge wird dabei zwar in der Regel kaum kleiner – tatsächlich wächst sie oft sogar geringfügig –, doch die Übertragung der Kennzahlen der Funktion anstelle der Zahlen selbst birgt einen großen Vorteil: Auch wenn die Funktion nicht komplett beim Empfänger ankommt, kann dieser sie aus den Bruchstücken eindeutig rekonstruieren – und damit die Zahlenreihe berechnen, die er eigentlich haben wollte.

Das ist in vielen Anwendungen hilfreich – etwa beim Hören von Musik-CDs. Denn selbst beim Lesen einer auf den ersten Blick kratzerfreien Scheibe können mehr als eine halbe Million Lesefehler auftreten. Wenn deutliche Kratzer dazukommen, dann gehen die Lesefehler in die Millionen. Obendrein treten sie gehäuft in so genannten „Bursts“ auf. Gerade damit kommen die Reed-Solomon-Codes jedoch gut zurecht.

7.3 WLAN und GSM störungsfrei

Doch es gibt auch andere Fehlerkorrekturen, etwa das Viterbi-Verfahren, das Mitte der 1960er-Jahre der aus Italien stammende Mathematiker Andrew James Viterbi begründet hat. Es basiert auf der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zunächst ergänzt der Sender jedes Bit, das er verschicken will, durch weitere Bits. Die Datenpakete werden auf dem Weg zum Empfänger gestört – doch aufgrund der Ergänzungen kann der Empfänger mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitstabellen abschätzen, welche Daten der Sender wohl abgeschickt hat. So ist es ihm möglich, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf die tatsächlich gesendete Bitfolge zu schließen.

Diese Fehlerkorrektur wird nicht nur in WLAN-Modems, bei den digitalen Rundfunkformaten DVB-T und DAB sowie beim Telefonieren mit GSM-Handys eingesetzt, sondern auch beim Tsunami-Frühwarnsystem: Hier kommunizieren Sonden, die Wasserdruck und Temperatur in bis zu 6.000 Meter Wassertiefe messen, über Unterwassermodems mit Bojen an der Oberfläche.

Doch nicht nur Viterbis Fehlerkorrektur hilft den Technikern bei der Übertragung von Daten. Mathematik spielt auch eine wichtige Rolle, wenn es darum geht, Daten auf Schallwellen aufzuprägen. Denn die Ingenieure können unter anderem zwischen den beiden folgenden Möglichkeiten wählen: Daten werden entweder als Töne verschickt – ähnlich wie beim Faxgerät – oder als Phasenverschiebungen auf feste Trägerfrequenzen aufgeprägt. Dabei haben die Ingenieure damit zu kämpfen, dass Wasser Schallwellen je nach Druck, Temperatur und Salzgehalt unterschiedlich schnell transportiert. Die korrekte Information lässt sich auch hier wieder dank mathematischer Formeln rekonstruieren.

7.4 Komprimierungen für MP3, JPG und HDTV

Mathematische Methoden helfen auch immer dann, wenn es gilt, Datenmengen zu reduzieren. Datenformate wie MP3 für Audiodaten – eine mathematische Entwicklung des Fraunhofer-Instituts für Integrierte Schaltungen (IIS) in Erlangen – und das Format JPG für Bildinformationen haben die Kommunikation in Ton und Bild revolutioniert und die Internetkommunikation in der heutigen Form möglich gemacht.

Selbst an Stellen, an denen man es nicht vermutet, werden Daten mit mathematischen Tricks komprimiert. Das kann sogar verlustfrei geschehen, denn es gibt Algorithmen, die es Empfängern ermöglichen, eine exakte Kopie des gesendeten Materials zu „entpacken“ – und nicht nur Näherungen. Ein Beispiel ist der Huffman-Code, der in den 50er-Jahren vom amerikanischen Mathematiker David Albert Huffman entwickelt wurde. Dieses Kompressionsverfahren wird bei Faxgeräten oder bei hochauflösendem Fernsehen (HDTV) verwendet. Ein Teil der MP3-Komprimierung beruht ebenfalls darauf.

Die zu übertragenden Zahlen werden beim Huffman-Verfahren nach ihrer Häufigkeit in eine Art Baumstruktur einsortiert. Die Position im Baum liefert den „Namen“ der Zahl, unter dem sie vom Sender kodiert und verschickt wird. Der Trick: Jeder der Code-Namen beginnt anders. Daher kann man bei der Übertragung auf „Trenner“ zwischen den Buchstaben verzichten und verbraucht so minimal wenige Bits – die Zahlenreihe wird also sehr kurz kodiert.

7.5 Packen, Falten, Legen – Mathematik im Handy

Auch das gesprochene Wort im Handy benötigt Komprimierung, denn die digitalen Sprachdaten sind vergleichsweise umfangreich. In der Regel sind es 64 Kilobit, die pro Sekunde übertragen werden müssten – viel zu viel für ein handelsübliches GSM-Handy, dessen Funkkanal in der Regel für gerade einmal 9,6 Kilobit Sprachdaten ausgelegt ist. Zumal zusätzlich auch Informationen zur Identifikation des Telefons und Daten zur Fehlerkorrektur übertragen werden müssen.

Die digitalen Sprachdaten werden daher in kleine Abschnitte zerlegt und durch Filter geschickt, um zum Beispiel Sprachpausen zu registrieren und Vokale künstlich zu verkürzen. Anschließend werden die Daten in einer komplizierten Kodierung mit unterschiedlichen Verfahren gepackt, gleichsam gefaltet und in Zeitscheiben zerlegt, weil sich so mehrere Nutzer eine Empfangsantenne teilen können.

Beim Empfänger geht das Rechnen dann weiter: Falls zum Beispiel – trotz Tricks wie dem so genannten Frequenzhopping – ein Sprach-Datenpaket nicht mehr wiederherzustellen ist, dann schätzt das Empfängerhandy mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie die Information gelautet haben könnte. Der Effekt: Die Lücken werden mit Hilfe von Mathematik so geschlossen, dass man sie kaum wahrnimmt.

7.6 Mehr Sicherheit am Geldautomaten

Nicht nur Störungen sind bei der Kommunikation unerwünscht, sondern in der Regel auch Mithörer oder -leser – besonders bei Finanztransaktionen oder im militärischen und diplomatischen Bereich. Informationen müssen daher verschlüsselt werden. Zuweilen dienen Schlüssel aber auch als eine Art Ausweis, der zum Beispiel sicherstellt, dass nur der Kontoinhaber am Geldautomaten Geld von seinem Konto abheben kann.

Ein Schlüssel der ersten Art wird zum Beispiel beim Handy genutzt: Hier werden vor der Übertragung alle teilnehmerbezogenen Daten mit Hilfe einer Binärzahl aus 64 Nullen und Einsen für Dritte unlesbar gemacht. Ein Schlüssel der zweiten Art ist die PIN für die EC-Karte. Sie wird unter anderem mit dem DES-Verfahren erzeugt. DES steht für „Data Encryption Standard“, eine Verschlüsselungsmethode, die von IBM und der US-amerikanischen „National Security Association“ entwickelt wurde. Hierbei werden Kontonummern und andere Zahlen mit Hilfe eines 56 Bit langen Schlüssels, den nur die Bank kennt, durcheinandergewürfelt und komprimiert. Möchte ein Kunde Geld abheben, wird die eingegebene PIN vom Geldautomaten an die Bank übertragen. Dort wird mit Hilfe des geheimen Bankschlüssels und der Kontodaten die PIN berechnet und mit der eingegebenen Zahl verglichen – und nur, wenn beide übereinstimmen, gibt der Automat das Geld frei.

Art ist die PIN für die EC-Karte. Sie wird unter anderem mit dem DES-Verfahren erzeugt. DES steht für „Data Encryption Standard“, eine Verschlüsselungsmethode, die von IBM und der US-amerikanischen „National Security Association“ entwickelt wurde. Hierbei werden Kontonummern und andere Zahlen mit Hilfe eines 56 Bit langen Schlüssels, den nur die Bank kennt, durcheinandergewürfelt und komprimiert. Möchte ein Kunde Geld abheben, wird die eingegebene PIN vom Geldautomaten an die Bank übertragen. Dort wird mit Hilfe des geheimen Bankschlüssels und der Kontodaten die PIN berechnet und mit der eingegebenen Zahl verglichen – und nur, wenn beide übereinstimmen, gibt der Automat das Geld frei.

Ein anderes Verfahren, das bis zum Jahr 2000 unter Patentschutz stand, dient heute unter anderem der Verschlüsselung des Datenverkehrs im Internet: das Verschlüsselungsverfahren RSA.

Die Idee ist einfach: Salz und Zucker zusammenzuschütten, ist ein Kinderspiel, aber die Kristalle hinterher wieder auseinander zu sortieren, ist eine langwierige Arbeit. Auf die Mathematik übertragen bedeutet das: Die Erfinder des RSA-Algorithmus verwendeten zum Verschlüsseln eine Operation, die man leicht in eine Richtung durchführen kann, aber nur sehr schwer in die umgekehrte: die Primfaktorzerlegung. Ein Beispiel: Die Primzahlen 3, 31 und 1.381 sind schnell miteinander multipliziert, das Ergebnis ist 128.433. Aber in welche Primfaktoren zerfällt die Zahl 1.221.162? Noch immer gibt es kein effektives Verfahren, das die Primfaktoren großer Zahlen mit einigen hundert Dezimalstellen schnell bestimmt.

Wird nun ein Text mit Hilfe von RSA verschlüsselt, werden zwei große Primzahlen gesucht und als für alle zugänglicher Schlüssel veröffentlicht. In diesen Code geht das Produkt dieser beiden Primzahlen ein. Zum Entschlüsseln des Textes wird jedoch wiederum ein privater Schlüssel benötigt, in dem die Informationen über die beiden Primfaktoren enthalten sind – diese bleiben natürlich geheim.

Derartige Verschlüsselungstechniken beruhen zum Teil auf über 150 Jahre altem mathematischem Wissen. Es geht auf den Mathematiker Evariste Galois zurück, einen französischen Revolutionär, der unter abenteuerlichen Bedingungen seine ersten Ideen zur Gruppentheorie aufschrieb.

7.7 Chiffren und Algorithmen auf dem Prüfstand

Mathematiker interessieren sich auch für die Frage, wie sicher eine Chiffriermethode ist. Bei RSA ergibt sich entsprechend die Fragestellung, wie schnell man Zahlen in Faktoren zerlegen kann. Damit beschäftigt sich zum Beispiel das Team um Jens Franke und Thorsten Kleinjung an der Universität Bonn, die derzeitigen Weltrekordhalter in Fragen der Faktorisierung. Mit Hilfe ausgefeilter Tricks und Algorithmen faktorisierten sie in monatelanger Arbeit zum Beispiel die Zahl 2^{1039} -1, eine Zahl mit 139 Dezimalstellen. Ihr derzeit bestes Ergebnis ist aber eine Zahl mit 200 Stellen, deren zwei Primfaktoren sie 2005 nach mehreren Jahren Arbeit berechnen konnten.

Andere Forscher kümmern sich um die Frage, wie sicher der DES-Algorithmus für die Nutzung von EC-Karten ist. Im März 2007 etwa verkündete ein Team um Christof Paar und Manfred Schimmler an den Universitäten Kiel und Bochum, mit einer speziellen Rechnerarchitektur könne man den DES-Schlüssel innerhalb von sechseinhalb Tagen knacken. Das Team hatte dazu eigens einen speziellen kleinen Rechner gebaut, den es „Copacobana" nannte (die Abkürzung steht für „Cost-Optimized Parallel Code Breaker"). Copacobana arbeitet mit „brute force", das heißt, der Rechner probiert einfach alle möglichen 2^{56} Schlüssel aus. Hierfür arbeiten die 120 Prozessoren von Copacobana parallel – jeder Prozessor testet pro Sekunde 400 Schlüssel.

7.8 Optimierung für die Kommunikation von morgen

Mathematiker ermöglichen aber auch auf ganz andere Weise, dass die zwischenmenschliche Kommunikation störungsfrei verläuft. Mobilfunkanbieter etwa sind daran interessiert, die knappen und teuren Mobilfunkfrequenzen möglichst effektiv nutzen zu können. Das Problem hierbei: Sendemasten, die mit derselben Frequenz Daten übertragen, können sich gegenseitig stören. Durch eine optimale Aufstellung der Masten kann man diese Störungen verringern – und braucht dabei auch weiterhin nur wenige Frequenzen zu verwenden. Zudem ist der Betrieb hierarchisch gegliedert: Sendemasten werden in Gruppen verwaltet, mehrere dieser Gruppen werden zusammen jeweils einer Vermittlungszentrale zugeordnet, welche die Telefongespräche weiterleitet. Wissenschaftler untersuchen hierbei, wie man diese Aufteilung möglichst ökonomisch gestaltet, sodass zum Beispiel nur kurze Verbindungen und wenige Vermittlungszentralen nötig sind.

Mit Fragen der Optimierung beschäftigen sich auch die Mathematiker am Zuse-Institut in Berlin. Durch geschickte Frequenzzuweisung ist es ihnen gelungen, bei einem Mobilfunkanbieter Störungen deutlich zu verringern. Ein anderes Projekt verfolgt der Professor für Mobilfunkkommunikation und Leibniz-Preisträger 2008, Holger Boche, am Heinrich-Hertz-Institut des Berliner Fraunhofer-Instituts für Nachrichtentechnik und zeitgleich an der Technischen Universität Berlin. Boche beschäftigt sich als Mathematiker unter anderem damit, wie man in innovativen Mehrantennensystemen die Ressourcen optimal auf alle Nutzer verteilt. Ziel des Projekts ist es, die Effektivität des Mobilfunknetzes bis 2010 deutlich zu steigern – denn der Bedarf wird bis dahin nach vorsichtigen Schätzungen ungefähr um den Faktor 10 anwachsen. Für die moderne Breitband-Mobilkommunikation ist das eine spannende und zugleich herausfordernde Aufgabe. Dank der Mathematik ist diese auch lösbar.

8 Mathematik und Kunst

Was ist Schönheit? Ist sie objektiv erfassbar, gar messbar? Gibt es Gesetze,in die sich das Schöne, Wahre und Gute in der Kunst fassen lassen? Auf diese Fragen sucht die Kunsttheorie ebenso Antworten wie viele Kunstschaffende. Symmetrie, Proportionen, Perspektiven spielen dabei eine entscheidende Rolle – und stellen zugleich eine Verbindung zur Mathematik her. Denn künstlerische und mathematische Grundgedanken greifen nicht nur bei der Geometrie oder der Zentralperspektive ineinander. Als Inbegriff von Harmonie und Schönheit gilt der „Goldene Schnitt“, eine aus der Geometrie Euklids stammende Erkenntnis aus der Zeit um 300 v. Chr. Seither suchen mathematische Künstler und künstlerische Mathematiker nach gemeinsamen Wegen, lassen sich an den Schnittstellen zwischen dem ästhetisch Schönen und dem mathematisch Beweisbaren inspirieren. In Deutschland befasste sich unter anderem Albrecht Dürer intensiv mit der Suche nach den perfekten Proportionen. Er hatte die Einsicht, dass nur die „Geometria [...]die gründliche warheyt anzeygt“.

In der bildenden Kunst finden sich viele Stile und Strömungen, die sich theoretisch oder praktisch mit mathematischen Formeln und Formen auseinandersetzen. Beispielhaft steht das 20. Jahrhundert, als eine Welle der Geometrisierung in Malerei, Bildhauerei und Architektur zu beobachten war. Ob Kubismus, geometrische Abstraktion, konstruktivistische Werke, Op-Art oder aktuelle Computerkunst – die Kunstwerke von Bill, Braque, Mondrian, Malewitsch oder Vasarély lassen sich auch als Bindeglieder zwischen Mathematik und Kunst verstehen.

Eine besondere Rolle im Verhältnis von Kunst und Mathematik kommt den Werken des niederländischen Grafikers Maurits Cornelis Escher zu. Bei seinen „unmöglichen Figuren“ handelt es sich in vielen Fällen um fantastische optische Täuschungen: Zweidimensionale grafische Darstellungen erwecken den Eindruck der Dreidimensionalität. Viele dieser Figuren sind mathematisch begründbar und von Gesetzen und Effekten aus der Mathematik inspiriert.

Bis heute gibt es außerdem Künstler, die in ihren Werken die Mathematik selbst sprechen lassen möchten. Sie widmen ihre Arbeit der Darstellung mathematischer Theorien und Problemstellungen, suchen Harmonie und Ordnung in Primzahlbildern und magischen Quadraten oder möchten Mathematik selbst im Bild darstellen: die Schönheit dieser Disziplin, den Zauber von Axiomen und mathematischen Beweisführungen.

Alle Kreativen verbindet jedoch, dass sie mit ihrer Arbeit ähnlich wie Mathematiker Motive, Strukturen und Muster schaffen, die Jahrhunderte überdauern können. Sie alle sind zudem der Beweis dafür, dass Kunst und Mathematik in ihrer ganzen Vielfalt einander immer wieder aufs Neue bereichern und erweitern.

8.1 Wahre Schönheit: der Goldene Schnitt

Was haben eine Fotografie von Henri Cartier-Bresson, der Parthenon-Tempel auf der Akropolis oder die Selbstbildnisse Albrecht Dürers gemeinsam? Sie alle folgen einem bestimmten Verhältnis der Proportionen. Dieses Idealmaß wird auch als „goldener Schnitt“ bezeichnet und beträgt 1 zu 1,618… – eine mit unendlich vielen Nachkommastellen befrachtete, hier nur auf drei Nachkommastellen genau genannte Zahl. Dieses Verhältnis wird auch als „phi“ bezeichnet und drückt sich als Formel folgendermaßen aus: Eine längere Strecke a (1) verhält sich zu einer kürzeren b (0,618…) wie beide Strecken zusammen (1,618…) zu a (1). Beide Male lautet der Faktor 1,618….

Dieser Inbegriff der ästhetischen Proportion findet sich auch in der Natur. So nutzen Pflanzenblätter, die im goldenen Winkel zueinander stehen, das Sonnenlicht optimal. Auch für Schneckenhäuser und selbst in Körper- oder Gesichtsproportionen des Menschen ist der goldene Schnitt erkennbar, der „vitruvianische Mann“ von Leonardo da Vinci ist hierfür ein Beispiel: Der Körper eines Mannes mit ausgestreckten Armen und Beinen befindet sich in einem Kreisbild und erinnert an ein Pentagramm – eines der ältesten magischen Symbole der Kulturgeschichte und zugleich eines mit einer besonders engen Verbindung zum Goldenen Schnitt.

Der Parthenon-Tempel der Akropolis, der Dom von Florenz, die Kathedrale Notre Dame und sogar die Cheops-Pyramide sind nach diesen Idealproportionen gebaut. Und der Turm des alten Leipziger Rathauses, eines der letzten großen deutschen Renaissancebauwerke, wurde nicht in die Mitte des Bauwerks, sondern versetzt im Verhältnis des goldenen Schnitts errichtet. Neben den Architekten setzten auch viele Maler und Bildhauer den Goldenen Schnitt in ihren Arbeiten ein. Beispiele finden sich in der griechischen Antike, bei Raffael, da Vinci und Dürers Selbstbildnissen bis hin zur Bildgestaltung in der Fotografie Cartier-Bressons. Der Maler und Architekt Le Corbusier ersann, auf der Grundlage des Goldenen Schnitts und menschlicher Maße, ein einheitliches Maß- und Ordnungssystem – wofür ihm 1934 der Ehrendoktor der Universität Zürich verliehen wurde.

8.2 Genie zwischen Kunst und Mathematik: Albrecht Dürer

Ein bedeutender deutscher Künstler hat sich schon vor langer Zeit besonders intensiv mit mathematischer Theorie beschäftigt. Man kennt nicht nur seine Selbstbildnisse, seine anatomisch sehr genau dargestellten betenden Hände und seinen naturgetreuen Hasen, sondern natürlich seine Initialen: das D unter dem größeren A. Doch nur wenige wissen über Albrecht Dürer, dass aus seiner Feder bedeutende mathematische Texte stammen. Der gebürtige Nürnberger lebte in der Renaissance, einer Epoche, in der Kaufleute, Seefahrer, Ärzte, Juristen und eben auch Maler durch ihre Erfahrungen die Mathematik weiterentwickelten, ohne das Fach studiert zu haben. In seinen späten Lebensjahren verfasste Dürer die „Underweysung der messung mit dem zirckel un richtscheyt“, in der er die mathematisch-geometrischen Verfahren der Zentralperspektive beschrieb und damit die Grundlagen für die darstellende Geometrie legte. Neben dem geometrischen Konstruieren mit Zirkel und Lineal lieferte er Beiträge zu einer ganzen Reihe von Themenfeldern; neben der Zentralperspektive untersuchte er unter anderem stilistisch einheitliche Alphabete, Parkettierung und Ornamente und vor allem Polyeder. Vielflächige Körper und Figuren waren ein regelrechtes Modethema unter den führenden Denkern der Renaissance.

Bezeichnend für Dürers intensives Verhältnis zur Mathematik ist auch sein Kupferstich „Melencolia I“ aus dem Jahr 1514. Die allegorische Darstellung eines tief in Gedanken versunkenen Engels spielt, so die Auslegung, auf den Denkprozess bei der Lösung eines mathematischen Problems an. Ein magisches Quadrat, Zeichengeräte und dazu die zentralperspektivische Darstellung sind weitere Hinweise auf die Mathematik. Wichtiger Blickpunkt links im Bild ist ein ungewöhnliches Polyeder, eine Art verzerrter, auf der Spitze stehender Würfel, dem die obere und untere Ecke abgeschnitten wurde. Dürer selbst entwickelte verschiedene Vielflächner, unter anderem einen nahezu kugelförmigen Hohlkörper, dessen Hülle aus Fünf- und Sechsecken besteht – und wie eine Urform des klassischen schwarz-weiß gefleckten Fußballs wirkt.

8.3 Kubismus, Konstruktivismus, Computerkunst

Vom Runden zum Eckigen: Als ein Kunstkritiker 1908 die abstrakten Bilder Georges Braques in Augenschein nahm, beschrieb er sie als „bizarre Kuben“ – die Geburtsstunde des Kubismus und ein Wendepunkt in der Kunst. Mit der Darstellung von Würfeln, Kugeln, Kegeln, Pyramiden und Zylindern fanden als erste Braque und Pablo Picasso neue geometrische Ausdrucksformen und übten damit zugleich Kritik am Realismus in der Malerei der damaligen Zeit. Beeinflusst vom Kubismus begründete wenig später Piet Mondrian seinen eigenen Weg der abstrakten Geometrie, mit Farbflächen in den Grundfarben Rot, Gelb, Blau und ihren Mischfarben Weiß und Schwarz. Für ihn war es „Schönheit auf der ganzen Linie“ und „Harmonie durch das Gleichgewicht der Beziehungen zwischen Linien, Farben und Flächen“. Ein einfaches geometrisches Formenvokabular und ebenfalls große Farbflächen kennzeichnen den Konstruktivismus. Seine Anhänger vertraten ein geometrisch-technisches Gestaltungsprinzip, bei dem Kunstobjekte – neben Malerei auch Plastiken und Architektur – auf mathematisch fundierten Konstruktionen beruhten. Die Konstruktivisten, allen voran der russische Maler Kasimir Malewitsch, wollten zudem die etablierte und gewachsene Bildersprache hinter sich lassen, um „noch einmal von vorne anzufangen“. Neue Wege beschritt auch eine Kunstrichtung, die auf experimentelle und spielerische Art geometrische Formen als optische Effekte und Täuschungen einsetzte: die so genannte Op Art. Ihr Begründer und Hauptvertreter, der Ungar Victor Vasarély, war sich dabei des dekorativen Charakters dieser „Computerkunst ohne Computer“ durchaus bewusst. Eine demokratische, nicht elitäre Kunstform wollten die Künstler um Vasarély schaffen – auch hier fanden Fachleute wichtige Parallelen zur Mathematik, die sie, wie der Theoretiker Alain Badiou, als Wissenschaft „von allen und für alle“ sehen.

Von der Op-Art war es dann nur noch ein kleiner Schritt zur digitalen Kunst, bei der ein mit entsprechender Software ausgestatteter PC Pinsel und Reißbrett ersetzte. Neben 3-D-Bildern, pixelfreien Vektorgrafiken und „Photopaintings“ auf der Grundlage von Bildbearbeitungsprogrammen hat sich hier auch so genannte mathematische Kunst etabliert: Bei dieser auch als algorithmische Kunst bezeichneten Gattung benutzen die Künstler komplexe mathematische Formeln, um damit dynamische Formen wie zum Beispiel Fraktale zu generieren, Formen also, die wiederum aus ihnen selbst ähnlichen Formen zusammengesetzt sind. Diese kolorieren sie dann und bearbeiten sie digital. Ohne Computer wären diese Arbeiten nicht denkbar, sie sind digitale Kunst in ihrer reinsten Form, bei der das Internet als Ausstellungsforum dient.

8.4 Unmögliche Figuren: die Kunst M. C. Eschers

Ein Blick zurück in analoge Welten: Ein Sonderfall im Verhältnis von Mathematik und Kunst sind die Werke von Maurits Cornelis Escher. Vor allem durch seine „unmöglichen Figuren“ wurde der Niederländer bekannt: grafisch zweidimensionale Konstrukte mit dreidimensionalen Darstellungen, die real nicht existieren können. Es handelt sich entweder um Paradoxa, wie die berühmten sich einander zeichnenden Hände, oder um optische Täuschungen, wozu seine Arbeit „Ascending Descending“ gehört. Hier wie in vielen seiner Werke sieht man Gebäudeteile oder Treppen, die natürlich erscheinen, auf den zweiten Blick aber widersprüchlich sind. Zu den perspektivischen Unmöglichkeiten und Wahrnehmungsphänomenen gehört auch das Wasserfall-Bild, bei dem das Wasser gleichsam vorwärts und rückwärts zu fließen scheint. Dennoch sind viele seiner unmöglichen Figuren erklärbar und verarbeiten mathematische Effekte. Das besondere Interesse der Experten gilt Eschers Holzschnitten „Circle Limit I—IV“, in denen er Prinzipien und Effekte der so genannten hyperbolischen Geometrie verarbeitet, in der das Parallelaxiom der klassischen Geometrie Euklids keine Anwendung mehr findet. Ein besonderes Zusammenspiel zwischen Mathematik und Grafik gab es auch bei einem Projekt unter der Leitung des Holländischen Mathematikers Hendrik Lenstra, in dessen Verlauf mit aufwendigen mathematischen Methoden die fehlende Mitte aus Eschers Graphik „Print Gallery“ rekonstruiert wurde.

Vor allem in der zweiten Lebenshälfte fühlte sich Escher der Mathematik besonders nahe: „Obwohl ich über keinerlei exakt-wissenschaftliche Ausbildung und Kenntnisse verfüge, fühle ich mich oft mehr mit Mathematikern als mit meinen eigenen Berufskollegen, den Künstlern, verwandt“, wird Escher in seiner Biografie zitiert.

8.5 Treffpunkt im Unendlichen – Mathematik als Motiv

Wie lassen sich nun aber mathematische Beweise und Formeln ganz konkret darstellen? Zu den Künstlerinnen und Künstlern, die sich dieser Frage verschrieben haben und damit eine ganz eigene Kunstform an der Schnittstelle zur Mathematik begründen, zählt Eugen Jost. In seinen Bildern spielt der Schweizer mit verschiedenen formalen Prinzipien und widmet sich dabei auch der Ästhetik von Symmetrien, Proportionen und Zahlenstrukturen – angesiedelt zwischen Chaos und strenger mathematischer Ordnung. In seinen Bildern werden mathematische Theorien und Problemstellungen verarbeitet, mit denen Jost den Intellekt ebenso ansprechen möchte wie das ästhetische Empfinden. Eine Ausstellung einiger seiner Werke ist im Rahmen der Initiative „Alles ist Zahl“ im Jahr der Mathematik 2008 noch in Bamberg, Konstanz, Berlin und Nürnberg (geplant) zu sehen.

Ebenfalls aus der Schweiz stammt Suzanne Daetwyler. Auch sie sucht nach Wegen einer direkten Umsetzung der Mathematik in Kunst. Dabei entstehen ihre Werke häufig aus den Formeln selbst, wie das Primzahlenbild „1-9216“. Spiralförmig ordnet sie die natürlichen Zahlen an und füllt Felder mit Primzahlen farbig aus. In einem anderen Werk hat sich Daetwyler magischen Quadraten gewidmet, Zahlenharmonien, so sagt sie, die in ihr das Bild von Vollkommenheit erwecken: „Sie sind von einer reinen und abstrakten Ganzheitlichkeit, die eine starke Faszination auf mich ausübt und mich immer wieder veranlasst, nach neuen Harmonievariationen zu suchen. Diese Harmonien haben für mich nichts mit Ästhetik zu tun – diese bleibt im Bereich der äußeren Wahrnehmung stecken. Magische Quadrate sind Umsetzungen alter Gesetzmäßigkeiten ins Bildliche."

Um immer wieder neue Gedankenmodelle geht es auch Julian Kerscher. Den 22-jährigen Münchner Mathematikstudenten fasziniert die Schönheit seines Studienfachs ebenso wie die klar definierten Spielregeln, die den Rahmen für immer neue Konstruktionen setzen. Vor allem in der reinen Mathematik findet Kerscher dabei Inspiration. Eines seiner Bilder behandelt den Unendlichkeitsbegriff des Mathematikers Georg Cantor. Dieser hatte bewiesen, dass die Menge aller Teilmengen einer Menge mächtiger sein muss als die Menge selbst. Dem Betrachter erschließen sich Kerschers Bilder vielleicht nicht ohne Weiteres – doch Neugierde auf die vielen Rätsel, auf das Schöne, Wahre und Gute in der Mathematik wecken sie in jedem Fall.

9 Mathematik und Medizin

Mathematik spielt in der Medizin eine große Rolle. Ob bei der Aufarbeitung von Messdaten bildgebender Verfahren und der computergestützten Operationsplanung über die Entwicklung neuer Medikamente bis hin zur Diagnose und Erforschung von Krankheiten. Die Anwendungen der Mathematik in der Medizin sind vielfältig und werden zu weiteren deutlichen Fortschritten bei Diagnose- und Behandlungsmethoden führen, unter anderem bei Aids- oder Krebserkrankungen.

Heute können zum Beispiel Operationen mit Hilfe von Softwaresystemen vor dem Eingriff genauer geplant werden. Zudem ist der Einsatz von Computern in Operationssälen, medizinischen Forschungslaboren sowie in Röntgengeräten unverzichtbar. Moderne Mathematik hilft auch bei der Auswertung von Studien. Und: Mathematik kann mit Hilfe von statistischen Methoden bei der Wahl der richtigen Behandlung Entscheidungshilfe leisten.

Eine Unterstützung für Mediziner ist Mathematik auch bei der richtigen Aufarbeitung von Messdaten, etwa aus Computertomografen, wenn es gilt, diese zu visualisieren. Und immer öfter ist Mathematik sogar bei der Auswertung der Daten von Nutzen, um unmittelbar medizinische Fragestellungen zu beantworten. Zum Beispiel: Wie wendet man Nasenspray richtig an? Ein weiterer Bereich, in dem Mathematik und Medizin sich nahekommen, ist die Systembiologie. Eine Aufgabe ist hierbei beispielsweise die Modellierung einzelner Zellfunktionen mit dem Ziel, mit Medikamenten genau an der richtigen Stelle eingreifen zu können.

9.1 Mit Mathematik Kosten in der Entwicklung von Medikamenten sparen

Die Statistik ist ein Untergebiet der Stochastik, welches sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Modellierung zufälliger Ereignisse befasst. Stochastische Methoden helfen Mathematikern unter anderem, die beträchtlichen Kosten medizinischer Studien zu senken - beispielsweise wenn die Wirksamkeit einer Heilmethode getestet werden soll. In der ersten randomisierten Doppelblindstudie der Geschichte machte der Mediziner und Statistiker Austin Bradford Hill (1897—1991) das im Jahre 1949 so: Eine Gruppe Lungentuberkulosekranker bekam das Antibiotikum Streptomycin verabreicht, eine zweite etwa gleich große Gruppe ein Placebo-Medikament. Weder die Patienten noch die Ärzte wussten, wer was erhielt. Lässt sich diese Versuchsanordnung aber auch verwenden, wenn man die Wirksamkeit zweier Medikamente vergleichen will? „Nein. Gleich große Kollektive für beide Therapieformen zu bilden, ist in der Regel keineswegs optimal“, erklärt Holger Dette vom Lehrstuhl für Stochastik der Ruhr-Universität Bochum. Doch wie sieht dann das optimale Design einer Studie aus? Genau mit dieser Frage beschäftigt sich Dette im Projekt „Cost efficient designs for practioners“, das das amerikanische National Institute of Health (NIH) in Zusammenarbeit mit der Ruhr-Uni Bochum durchführt. Seit August 2006 läuft es für drei Jahre. Ziel des Projekts ist es, mit möglichst wenigen Tests (und Kosten) die Fragen zu beantworten, die Mediziner und Pharmakologen hierbei bewegen.

9.2 Klarheit durch Mathematik: größerer Heilungserfolg bei Brustkrebs

Dettes Kollege Walter Lehmacher leitet das Institut für Medizin, Statistik, Informatik und Epidemiologie der Universität zu Köln. Er befasst sich ebenfalls mit medizinischen Studien, etwa zur Sicherheit von Aspirin oder zur Behandlung von Brustkrebs. Mit Hilfe der Stochastik hat er unter anderem die Behandlung von Brustkrebspatientinnen unter die Lupe genommen. Ergebnis hier: Der Heilungserfolg ist größer, wenn die Frauen die volle Information über Ausmaß der Erkrankung, der Heilmethoden und die Heilungschancen erhalten.

9.3 Mathematische Modelle beschreiben die Ausbreitung von Krankheiten

Stochastische Methoden verwenden auch Wissenschaftler um den Leibnizpreisträger Theo Geisel vom Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation — allerdings für ganz andere Zwecke. Seit einigen Jahren untersuchen die theoretischen Physiker die Reiserouten von Menschen oder Geldscheinen. Auf der Basis dieser Ergebnisse entwickeln sie nun neue mathematische Modelle zur Beschreibung von Ausbreitungswegen und -geschwindigkeiten der „blinden Passagiere“, die mit den Menschen mitreisen: Viren und andere Krankheitserreger. Ergebnis: Die derzeitigen Modelle, mit denen die Ausbreitung von Seuchen beschrieben werden, passen nicht auf die moderne Realität. Denn anders als im Mittelalter verbreiten heute schnelle Reisemittel wie Flugzeuge die Seuchen auch sprunghaft über weite Distanzen. So entwickeln die Wissenschaftler derzeit ein Modell, das die Dynamik von Seuchen richtig beschreiben soll.

9.4 Stochastik gibt Handlungsempfehlungen für erfolgreiche ärztliche Therapien

Viele Situationen im Behandlungszimmer lassen sich als mathematische Probleme modellieren. Ein Beispiel: Schwer kranke Patienten können mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch Behandlungen mit vielen Nebenwirkungen und Risiken (etwa durch Chemotherapien) geheilt werden. Der Arzt steht also vor der Wahl: Soll er eine riskante – unter Umständen noch wenig erprobte – Behandlung empfehlen und dabei möglicherweise auch wichtige Erfahrungen für die Behandlung des nächsten Patienten mit dieser Krankheit erhalten? Oder soll er sich auf eine sichere, weniger riskante Methode verlassen, die unter Umständen aber auch weniger Erfolg zeigen wird? Die Stochastik kann hier Handlungsanweisungen geben: Wenn der Arzt die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg abschätzen kann, dann kann er mit der einfachen „Odds-Strategie“ herausfinden, welche Behandlungsmethode er wählen sollte. Stochastiker können beweisen, dass diese Strategie sogar optimal ist: Der Arzt kann – auf der Basis seiner Wahrscheinlichkeitseinschätzung – keine bessere Entscheidung treffen.

9.5 Beispiel Aids: Statistische Analyse von HIV-Stämmen senkt Fehlerrate bei Therapieauswahl

Ein anderes Beispiel dafür, wie die Mathematik dem Arzt bei Entscheidungen helfen kann, liefert die Aids-Therapie. Die Schwierigkeit dabei beruht in erster Linie darauf, dass das HI-Virus, das die Krankheit verursacht, schnell mutiert und so Resistenzen gegen Medikamente entwickelt. Üblicherweise werden Patienten daher mit Medikamentencocktails behandelt, die das Virus auf unterschiedliche Weise in seiner Vervielfältigung behindern können. Im Idealfall stört man so jeden der HIV-Stämme, die der jeweilige Patient im Blut trägt. Hier beginnt die Arbeit der Mathematik: Ein Team um Thomas Lengauer unternimmt seit einigen Jahren am Max-Planck-Institut für Informatik in Saarbrücken statistische Analysen der Genome von bis zu mehreren zigtausend klinisch beobachteten HIV-Stämmen, die sie in einer Datenbank gesammelt haben. Auf deren Basis entwickelten sie Computermodelle, die die Resistenz klinisch auftretender viraler Varianten gegen verfügbare Medikamente und Medikamentencocktails schätzen.

Mit dem Wissen, welche Stämme im Blut des Patienten vorhanden sind, können die Mathematiker mit Hilfe einer eigens entwickelten und über das Internet frei nutzbaren Software inzwischen recht genau angeben, welche Medikamentencocktails für den jeweiligen Patienten vielversprechend sind. Statistische Evaluierungen der Software zeigen, dass die Fehlerrate bei der Therapieauswahl durch Mathematik von 24 Prozent auf 14 Prozent gesenkt werden konnte.

9.6 Bildgebende Verfahren: Krankheiten sichtbar machen mit mathematischen Algorithmen

Eine ganz andere Verknüpfung von Medizin und Mathematik betrifft bildgebende Verfahren. Die Anfänge dieser Technik reichen in die 60er-Jahre zurück, als die Computertomografie (CT) entwickelt wurde. Dabei werden aus Röntgenaufnahmen die (dreidimensionalen) Verhältnisse im Körper rekonstruiert. Dazu verwendet man die so genannte Radon-Transformation, ein mathematisches Verfahren, das der österreichische Mathematiker Johann Radon (1887-1956) entwickelt hat. Der Name für solche mathematischen Rekonstruktionsprobleme: „inverse Probleme“.

Ein anderes Beispiel für so ein inverses Problem ist die Rekonstruktion von Hirnströmen (genauer: Hirnstromdichten) aus der Potenzialverteilung an der Kopfoberfläche (EEG) oder aus dem magnetischen Fluss, der in geringer Entfernung von der Kopfoberfläche gemessen wird (MEG). Um zu wissen, welche Stromquellen im Gehirn das jeweilige Bild erzeugt haben können, muss man die Hirnströme simulieren und anschließend berechnen, wie damit das entsprechende EEG oder MEG ausgesehen hätte. Durch geschicktes Verändern der Simulation erhält man die wahrscheinlichste Stromquellenverteilung – eine Aufgabe, mit der sich die Numeriker Carsten Wolters und Martin Burger an der Universität Münster beschäftigen. Sie arbeiten dabei als Mathematiker dem einzigen Lehrstuhl für EEG und MEG in Deutschland zu.

Burgers Lehrstuhl beschäftigt sich außerdem mit molekularer Bildgebung, das heißt mit Verfahren, bei denen Markierungsstoffe (Tracer) bestimmte Ziele im Körper (Organe, Tumoren, Blutflüssigkeit) ansteuern und anschließend zum Beispiel mit Positronenemissionstomografie aufgenommen werden. Damit können quantitative Untersuchungen physiologischer Prozesse im Körper durchgeführt und Krankheitsursachen frühzeitig aufgespürt werden, etwa wenn es um den Sauerstoffgehalt in Blut und Gewebe geht. Auch der Zuckergehalt im Herzen lässt sich ermitteln, der nach einem Herzinfarkt Rückschlüsse darauf erlaubt, welche Teile des Herzens noch aktiv sind. Diese Untersuchungen – wie sie unter anderem am interdisziplinären „European Institute for Molecular Imaging“ (EIMI) oder dem Sonderforschungsbereich Molecular cardiovascular imaging durchgeführt werden – wären ohne moderne mathematische Algorithmen undenkbar.

Im medizinischen Bereich ist derzeit mit CTs eine visuelle Auflösung von etwa einem halben Millimeter erreichbar – undenkbar ohne Mathematik. Doch nicht nur das Erzeugen der 3-D-Bilder an sich ist für Mediziner wichtig: Auch in der weiteren Aufbereitung der CT-Daten für Diagnose und Therapie steckt Mathematik. So können Ärzte per Joystick und Bildschirm durch Lungenbläschen oder Gehirnventrikel „fliegen“ oder virtuell Darm- oder Magenspiegelungen vornehmen. Das geschieht oft unter Zuhilfenahme der Grafik-Software „Amira“, die ursprünglich von Mathematikern des Berliner Zuse-Instituts für angewandte Mathematik entwickelt wurde.

9.7 Analysieren und simulieren: mit Mathematik neue Gesichter simulieren

Mathematiker wollen den Computer quasi zum Assistenten des Arztes machen. Der Rechner soll helfen, tomografische Daten (etwa aus der Computer- oder Kernspinresonanz) nach medizinischen Vorgaben zu analysieren. Ein typisches Anwendungsfeld ist die Chirurgie; hier wird der Rechner bei der Operationsplanung genutzt. Dafür modellieren Mathematiker zum Beispiel das Muskelsystem des Menschen, den Zustand der Knochensubstanz (in Hinblick auf Osteoporose) oder sie simulieren den Zustand vor und nach Operationen in der Mund-, Kiefer und Gesichtschirurgie.

Ein wichtiges Zentrum für mathematisch-medizinische Forschung ist das Zuse-Institut Berlin (ZIB). Mathematik wird hier nicht nur in der Chirurgie angewandt: So simulieren Mathematiker am ZIB etwa den weiblichen Menstruationszyklus, um schonende Verhütungsmittel zu entwickeln. In einem anderen Projekt befassen sie sich mit „numerischer Strömungsanalyse“ der Atemluft in der Nase. Der Grund: Die Ursachen vieler Beschwerden, darunter Beeinträchtigungen des Geruchssinns oder Kopfschmerzen durch Nasenprobleme, sind für Ärzte schwer zu charakterisieren, weil niemand so recht weiß, wie die Atemluft genau durch die Nase strömt. Die Mathematiker simulieren diese Strömung nun auf Basis von anatomischen Modellen, die sie aus CT-Daten rekonstruiert haben, und berücksichtigen dabei das unterschiedliche Gewebe in der Nase. Vielleicht wird man auf der Basis dieser Ergebnisse eines Tages chronischen Schnupfen und Schnarchen behandeln können — oder ideale Nasenspray-Fläschchen entwickeln. Bislang nämlich wird Nasenspray oft falsch angewendet und erreicht daher nicht unbedingt sein Ziel, die Nasenschleimhaut.

9.8 Operationsrisiko berechnen: Fraktale Geometrie bietet Sicherheit

Ein Team um den Mathematiker Heinz-Otto Peitgen an der Universität Bremen bietet Medizinern eine Dienstleistung zur Unterstützung bei der Planung komplexer Leberoperationen an, zum Beispiel zur Entfernung von Tumoren der Leber oder bei der Leberlebendspende. Mathematiker und Mediziner analysieren die Daten und können mit Hilfe von Methoden aus der fraktalen Geometrie funktionelle Einheiten der Leber berechnen, die durch die versorgenden Gefäße definiert sind. In der Risikoanalyse werden die bei der operativen Entfernung der Tumore betroffenen Gefäße identifiziert und das von ihnen versorgte, postoperativ nicht funktionelle Lebervolumen quantifiziert. Durch Planung unterschiedlicher Resektionsstrategien können diese bezüglich der quantifizierten, assoziierten Risiken verglichen und somit die individuell optimale Therapie festgelegt werden. Diese Dienstleistung wird weltweit genutzt — übrigens besonders gerne von japanischen Kliniken, weil in Japan Organe von Hirntoten für Transplantationen aus ethischen Gründen nicht verpflanzt werden können. Die Mediziner sind dort daher besonders darauf angewiesen, Patienten auch mit geschädigten Lebern ein Weiterleben zu ermöglichen.

9.9 Mathematische Analyse für individuell angepasste Prothesen

Die mathematische Analyse von 3-D-Datensätzen wird auch dazu verwendet, den Patienten Standardprothesen individuell anzupassen. Das geschieht entweder durch Veränderung der Prothese (etwa durch Abschleifen) oder durch die Art, wie die Prothese eingesetzt wird. Zum Beispiel die Hüfte: Bei der mathematischen Untersuchung fand ein Team um Georg Duda, Ingenieur und Mediziner an der Charité Berlin, heraus, dass ein künstliches Hüftgelenk beträchtlich länger halten kann, wenn es im richtigen (individuell zu bestimmenden) Winkel in der Hüfte fixiert wird — eine Tatsache, die bei Operationen noch viel zu wenig beachtet wird.

9.10 Ungestört hören dank Mathematik

Manchmal müssen sich aber sogar die Prothesen selbst anpassen. Moderne Hörgeräte etwa sollen das Gehör in vielen Lebenslagen unterstützen. Auf winzigen Computerchips analysieren sie das digitale Signal, das aus dem Schall gewonnen wird, der am Mikrofon eintrifft. Sie entscheiden dann zum Beispiel mit Hilfe von mathematischen Algorithmen, in welcher Situation sich der Hörende gerade befindet. Zudem versuchen moderne Hörgeräte, die nichtlineare Frequenzfilterung (in der normalen wie in der geschädigten Hörschnecke) abzubilden. Sie unterdrücken Störgeräusche, um so das Sprachverstehen in lauten Umgebungen zu ermöglichen, und simulieren so den so genannten „Partyeffekt“. Obendrein reduzieren sie Rückkopplungen. Ein wichtiges Kernstück ist dabei die Fourieranalyse, ein mathematisches Verfahren, bei dem der Schall in einzelne Frequenzen zerlegt wird, denen jeweils eine Lautstärke zugewiesen wird. Erst die moderne Mathematik machte es möglich, dass dieses Verfahren auch im winzigen Computerchip im Hörgerät ablaufen kann, und zwar mit der so genannten „schnellen Fouriertransformation“ (FFT), die übrigens auch in der Bilddatenkompression angewendet wird.

Auch die Beschreibung des Hörvorgangs selbst wäre ohne Mathematik nicht möglich: Die Biomechanik des Innenohrs wird mit Gleichungen beschrieben, die aus der Quantenmechanik bekannt sind. Auch treten stochastische Resonanzphänomene auf, und neuerdings kommen sogar Methoden der Chaostheorie zum Einsatz.

9.11 Zellen zum Leben erwecken mit Systembiologie und Computeralgebra

Auch bei der Entwicklung von Medikamenten leistet die Mathematik ihren Beitrag. Etwa beim „Data-Mining" in der Gentechnik und bei der Rekonstruktion des vollen DNA-Strangs aus hunderten kleiner DNA-Abschnitte, die in der Zuchtlösung schwimmen. Auch bei der Modellierung der Chemie von Proteinen beim „Drug-Design" spielt Mathematik eine Rolle. Denn eine typische Frage dabei lautet: „Wie koppelt sich ein möglicher Wirkstoff an ein bestimmtes Protein?"

In der Systembiologie, einer recht jungen Disziplin, wird hingegen versucht, ganze biologische Systeme (etwa die Synthese bestimmter Proteine in Zellen) theoretisch zu modellieren und damit zu verstehen. Die Idee dabei: Wer ein biologisches System modellieren kann, der hat es so weit verstanden, dass er es auch (mit maßgeschneiderten Medikamenten) reparieren kann. Dafür gibt es in Deutschland seit Januar 2007 das BMBF-Förderprogramm FORSYS („Forschungseinheiten der Systembiologie"), an dem auch Mathematiker beteiligt sind, etwa das Team um Robert Weismantel am MaCS (Magdeburg Centre for Systems Biology).

Außerhalb von FORSYS beschäftigt sich auch der Algebraiker Bernd Sturmfels mit Systembiologie. Die Idee des Gastprofessors an der Technischen Universität Berlin: Bereits jetzt gibt es mächtige Software, mit der sich per Computer mathematische — genauer: algebraische — Probleme lösen lassen. Warum sollte man diese Software nicht auch für die Systembiologie nutzen können? Sturmfels nahm sich daher das Lactose-Operon im Bakterium Escherichia coli vor. Das Operon ist eine Gruppe von Genen, die in diesem Fall die Ernährung der Bakterie steuern: Je nachdem, ob Glukose oder Lactose vorhanden ist, ernährt sich das Bakterium vom einen oder vom anderen, und das Operon bildet entsprechend unterschiedliche Proteine zur Verdauung entweder von Glucose oder von Lactose. Zusammen mit einem Kollegen modellierte Sturmfels diese Zellfunktion als System mathematischer Funktionen und ließ es vom Computer lösen. So erweckte er ein kleines Stückchen Escherichia coli mit einem Computeralgebra-System zum Leben.

9.12 Zur Geschichte der Mathematik in der Medizin

Das Zusammenspiel der beiden Fächer reicht aber noch viel weiter und geht zumindest bis ins ausgehende 18. Jahrhundert zurück. Denn parallel zur Entwicklung der Statistik in der Mathematik entstand — von Großbritannien ausgehend — eine empirische Medizin, die sich auf die systematische Auswertung statistischer Daten stützte. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts immunisierte beispielsweise der britische Landarzt Edward Jenner (1749 - 1823) Menschen gegen Pocken, indem er sie mit der Lymphflüssigkeit von Kühen impfte, die mit der Krankheit infiziert waren. Seinen Erfolg belegte er mit Zählungen.

Jahrzehnte später, im Jahr 1854, fand der Arzt John Snow heraus, dass die Cholera nicht durch schlechte Dünste übertragen wird, wie man damals glaubte, sondern durch Keime im Trinkwasser. Seine Methode: Bei einer Choleraepidemie in London identifizierte Snow durch Auszählen der Todesfälle einen Brunnen in der Broad Street als infiziert.

Die Entwicklung in der Mathematik führte dazu, dass schlichte Zahlenvergleiche wie bei Jenner oder Snow heute als gewagt gelten: Stattdessen gibt die moderne Mathematik etwa vor, wie groß die Anzahl der Stichproben sein muss, damit Aussagen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit getroffen werden können. Das mathematische Handwerkszeug — von Kreuztabellen bis zu graphentheoretischen Netzwerk-Modellen — hat sich beträchtlich erweitert. Es lohnt sich daher, etwas genauer hinzuschauen, wie Mathematik der Medizin neue Möglichkeiten eröffnet.

10 Mathematik und Politik

Es ist Wahlabend, 18 Uhr. Soeben haben die Wahllokale geschlossen, und die Fernsehsender zählen die Minuten, bis die ersten Hochrechnungen vorliegen. Auch wenn erst ein Bruchteil der Stimmen ausgezählt ist, werden sie mit Spannung erwartet. Denn in der Regel sagen sie den tatsächlichen Wahlausgang bis auf wenige Prozentpunkte genau voraus. Hängt die Regierungsbildung nicht von wenigen Mandaten ab, ist die Wahl um kurz nach 18 Uhr prognostisch entschieden.

Möglich macht das die Mathematik, und zwar durch komplexe statistische Verfahren. Schon vorliegende Ergebnisse aus einzelnen Wahlbezirken werden nach komplizierten mathematischen Schlüsseln auf die Gesamtheit der Wählerschaft hochgerechnet. Mit jeder Hochrechnung kommen weitere Wahlkreise hinzu und im Laufe des Abends nähern sich die Hochrechnungen dem tatsächlichen Ergebnis an.

Und auch das Endergebnis der Wahlen hängt von mathematischen Verfahren ab, nach denen die jeweilige Sitzverteilung berechnet wird. Im Laufe der Zeit haben in Deutschland von unzählig vielen existierenden Verfahren drei Eingang in die Wahlgesetzgebung gefunden: das D'Hondtsche Höchstzahlverfahren, das Hare/Niemeyer-Verfahren und das Divisorverfahren mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers).

Doch nicht nur im Zusammenhang mit Wahlen zeigt sich die Bedeutung der Mathematik für die Politik. So wird gelegentlich auch die EU-Politik von ihr geprägt. Jahrelang stritten sich die Mitgliedsländer der Europäischen Union darüber, nach welchem Proporz die Stimmverteilung im wichtigsten Entscheidungsgremium der Union, dem Ministerrat, geregelt werden soll. Ein Beispiel ist die Auseinandersetzung um die so genannte Quadratwurzel, einem mathematischen Vorschlag zur Stimmverteilung nach Einwohnerzahl.

Die Beispiele zeigen, wie eng Mathematik und Politik zusammenhängen. Dabei ist Mathematik nicht nur ein technisches Werkzeug, das bei der Auszählung von Stimmen hilft, sondern selbst ein „Demokratiefaktor", der demokratische Staaten in der ganzen Welt prägt.

Das Hare/Niemeyer-Verfahren

Die Politik kennt zwei Grundtypen von Wahlsystemen: Mehrheits- bzw. Verhältniswahl. Sie unterscheiden sich in der Art und Weise, wie die Stimmen der Wählerinnen und Wähler in Mandate verwandelt werden. Bei der Mehrheitswahl stellen sich Abgeordnete in einer persönlichen Wahl direkt zur Abstimmung. Bei der Verhältniswahl wird aus den Stimmenanteilen der Parteien eine verhältnismäßige Sitzzahl im Parlament abgeleitet.

Die Besonderheit des bundesdeutschen Wahlsystems besteht in einer Mischung aus beiden Systemen. Jeder Wähler hat zwei Stimmen, eine so genannte Erststimme, mit der er sich für einen Kandidaten aus seinem Wahlkreis entscheidet, und eine Zweitstimme, mit der er sich für eine Partei entscheidet.

Der Anteil an den (mindestens) 598 Sitzen des Bundestages, die eine Partei zugesprochen bekommt, richtet sich nach ihrem Anteil an den Zweitstimmen. Die genaue Berechnung erfolgt seit 1987 über das Hare/Niemeyer-Verfahren, benannt nach dem englischen Juristen Thomas Hare und dem deutschen Mathematiker Horst Niemeyer.

Bevor das Verfahren angewendet wird, zieht man zunächst die Anzahl der Direktmandate ab, die von unabhängigen Kandidaten und von Kandidaten, deren Partei an der 5%-Prozent-Hürde gescheitert ist, gewonnen wurden. Entsprechend wird die Anzahl der Zweitstimmen nach unten korrigiert. Dann kommt das Hare/Niemeyer-Verfahren zur Anwendung. Zuerst berechnet man für jede Partei einen Sitzanspruch, indem man die noch übrigen Sitze mit den Zweitstimmen der Partei multipliziert und anschließend durch die Gesamtzahl aller Zweitstimmen der erfolgreichen Parteien teilt.

$$\frac{Anzahl\ Sitze \times Anzahl\ Zweitstimmen}{Anzahl\ aller\ Zweitstimmen} = Sitzanspruch$$

Der Sitzanspruch ist im Allgemeinen keine ganze Zahl, sondern eine gebrochene. Sie wird aufgeteilt in den ganzzahligen Anteil und den Nachkommateil. Die Sitzzuteilung erfolgt nun in zwei Schritten. Im ersten Schritt bekommt jede Partei entsprechend dem ganzzahligen Anteil ihrer Parteiquote Sitze zugewiesen. Im zweiten Schritt werden die danach noch verbleibenden Sitze anhand der Nachkommastellen vergeben. Den ersten freien Sitz bekommt die Partei mit dem größten Nachkommateil, den zweiten freien Sitz die Partei mit dem zweitgrößten Nachkommateil usw. bis alle Sitze vergeben sind. Sollten einmal gleich große Nachkommateile auftreten, entscheidet das Los.

Ein Beispiel: Bei der Bundestagswahl 2005 gab es keine unabhängigen Direktkandidaten und auch keine Direktkandidaten von Parteien, die an der 5%-Hürde gescheitert sind. Die zu vergebende Sitzzahl blieb also bei 598 Sitzen. In der folgenden Tabelle finden sich die Anteile der Zweitstimmen und die Anzahl der errungenen Sitze.

Partei	**Zweitstimmen**	**Hauptzuteilung**	**Quotientenreste**	**Restzuteilung**	**Sitze**
SPD	16 194 665	213	,170338		213
CDU	13 136 740	172	,918878	+1	173
FDP	4 648 144	61	,183509		61
Linke	4 118 194	54	,207778		54
Grüne	3 838 329	50	,523916	+1	51
CSU	3 494 309	45	,995581	+1	46
Gesamt	**45 430 381**	**595**		**+3**	**598**

Anzahl Zweitstimmen und errungene Sitze Bundestagswahl 2005.

Rechenbeispiel SPD: (16 194 665 x 598)/ 45 430 381 = 213,17

Welche Personen für die Parteien auf die gewonnenen Mandate rücken, wird auf zwei Wegen ermittelt. Die Gewinner der 299 Wahlkreise besetzen die erste Hälfte der Sitze im Bundestag. Die zweite Hälfte wird mit den Kandidaten der Landeslisten besetzt, die eine Partei im Vorfeld der Wahlen aufgestellt hat. Auch hier kommt wieder das Hare/Niemeyer-Verfahren zur Anwendung, nur dass es diesmal für jedes Bundesland separat angewendet wird. Es wird die Anzahl der Sitze, die eine Partei im Bundestag errungen hat, mit der Anzahl ihrer im betreffenden Bundesland gewonnenen Zweitstimmen multipliziert und durch die Zahl der bundesweit gewonnenen Zweitstimmen geteilt. Das abgerundete Ergebnis (zusammen mit einem etwaigen Restsitz) ergibt die Anzahl der Kandidaten, die von einer Landesliste in den Bundestag einziehen - und zwar von Listenplatz 1 abwärts.

Das D'Hondtsche Höchstzahlverfahren

Das Hare/Niemeyer-Verfahren ist eines von mehreren weltweit verwendeten mathematischen Verfahren, mit denen die Sitzverteilung in Parlamenten errechnet werden kann. Zwischen ihnen gibt es wesentliche Differenzen. Unterschiedliche mathematische Zuteilungsverfahren können bei gleichem Ergebnis zu unterschiedlichen Sitzverteilungen im Parlament führen. Bei knappen Wahlausgängen kann also das angewandte Verfahren mit darüber entscheiden, wer die Regierung stellt.

Bis 1987 wurde die Sitzverteilung des Bundestages nach dem Verfahren von D'Hondt ermittelt. Dieses Verfahren bevorzugt allerdings größere Parteien etwas zu Ungunsten kleinerer. Man entschied sich deswegen, es durch das Hare/Niemeyer-Verfahren zu ersetzen. Im Dezember 2007 hat die derzeit regierende große Koalition einen Gesetzentwurf eingebracht, um zum Divisorverfahren mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) zu wechseln.

Nach Auffassung von Mathematikern wie Professor Pukelsheim, der diverse Parlamente und Regierungen in Fragen des Wahlsystems berät, würde das so genannte „Divisorverfahren mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers)“ die Idee der Wahlgleichheit bestmöglich erfüllen. Es funktioniert nach dem einfachen Prinzip "Teile und Runde". Alle Zweitstimmen werden durch einen gemeinsamen Divisor geteilt, und das Ergebnis anschließend zur nächsten ganzen Zahl gerundet, d.h. Bruchteilsreste kleiner als 0,5 werden abgerundet, Reste größer als 0,5 werden aufgerundet. Bislang wird dieses Verfahren allerdings nur in Hamburg und Bremen, sowie bei der Besetzung der Ausschüsse des Bundestages angewendet.

Die Quadratwurzel

Auch der Streit der Mitgliedsstaaten der Europäischen Union über einen neuen EU-Vertrag war im Kern von mathematischen Fragen berührt. Größter Konfliktpunkt war über Jahre die Frage, wer welches Gewicht im wichtigsten Abstimmungsorgan - dem Ministerrat - haben soll. Die großen Staaten wollten sich mit einem neuen Vertrag mehr Einfluss sichern, weil sie sich durch die derzeit geltende Stimmenverteilung gegenüber den kleineren Mitgliedsstaaten benachteiligt fühlen.

Lange hatte es so ausgesehen, als würden die Mitglieder der Europäischen Union an dieser Frage nicht zueinander finden können. Die kleineren und mittleren Länder wollten verhindern, dass sich das Machtgewicht zu ihren Ungunsten verschiebt, und lehnten die Reformvorschläge der großen Länder ab. Stattdessen wurde die viel diskutierte Quadratwurzel-Berechnung für die künftige Stimmenverteilung im Rat vorgeschlagen. Sie geht auf den britischen Mathematiker Lionel Penrose zurück und wurde unter anderem von Professor Werner Kirsch von der Ruhr-Uni Bochum weiterentwickelt. Viele Mathematiker halten sie aus statistischen Gründen für das gerechteste Verfahren. Bei diesem zieht man aus der Bevölkerungszahl jedes EU-Mitgliedsstaates die Quadratwurzel, etwa neun aus gerundet 81 Millionen Deutschen. Portugal, das mit 10,6 Millionen Bürgern etwa ein Achtel der deutschen Bevölkerung ausmacht, hätte ein Drittel der Stimmenzahl, die Deutschland erhielte. Auf dem Gipfel in Brüssel im Juni 2007 setzte sich die Quadratwurzel jedoch nicht durch. Stattdessen einigte man sich auf das Verfahren der so genannten doppelten Mehrheit. Eine Mehrheit ist dann erreicht, wenn mindestens 55 Prozent der Staaten zustimmen, die mindestens 65 Prozent der EU-Bevölkerung vertreten.

11 Mathematik und Sport

Sepp Herberger, legendärer Trainer der Weltmeisterelf von 1954, brachte Fußball auf eine einfache Formel: „Der Ball ist rund und das Spiel dauert 90 Minuten.“ Bei genauerem Hinsehen stellt man jedoch fest: Er irrte! Der Ball ist gar nicht rund. Bei dem Spielgerät aus zwölf Fünfecken und 20 Sechsecken handelt es sich vielmehr um ein abgestumpftes Ikosaeder. Dieses Beispiel aus der Geometrie zeigt: Es lohnt sich, Sport aus dem Blickwinkel der Mathematik genauer zu betrachten.

11.1 Mathematik im Fußball

Wer ein Spiel seiner Lieblingsmannschaft verfolgt, der denkt dabei zwar zunächst nicht an Mathematik. Aber tatsächlich hinterlässt die Wissenschaft auch im Sport ihre Spuren: Ob bei dem geometrischen Aufbau von Bällen, bei Größe und Zusammenstellung der Mannschaft oder bei den Maßen des Spielfeldes – Mathematik ist oft mit im Spiel.

Mit ihrer Hilfe lässt sich die Frage beantworten: Warum sind die Maße eines Fußballfeldes eigentlich so, wie sie sind? Die Torbreite von 7,32 Meter und die Torhöhe von 2,44 Meter sind nicht zufällig gewählt. Die „krummen“ Werte rühren daher, dass Fußball ursprünglich aus England kommt und dort die Maßeinheiten Inch, Fuß und Yard existieren. So erklären sich Breite und Höhe des Tores ganz einfach: Es sind acht Yard beziehungsweise acht Fuß.

Auch die Anzahl der Spieler auf dem Feld lässt sich mathematisch erklären. Sicher gibt es historische Gründe dafür, eine Elf aufs Feld zu schicken – statt einer Dreizehn oder gar Zwanzig. Es lassen sich aber auch gute mathematische Argumente dafür finden, ausgerechnet zehn Feldspieler und einen Torwart spielen zu lassen. Die Grundlage für einen guten Spielzug ist, dass man den Ball unter Kontrolle bringt, dann die Übersicht gewinnt und schließlich den Ball kontrolliert weiterspielt. Für eine solche Aktion benötigt ein Spieler ungefähr drei Sekunden, rechnet Matthias Ludwig, Mathematik-Professor an der Pädagogischen Hochschule Weinberg, vor. Das würde bedeuten, dass man etwa 20 solcher Aktionen pro Spielminute hat.

In den drei Sekunden muss der Gegner eine reelle Chance haben, den Ball zu erreichen. Daher ist es interessant, die Fläche zu betrachten, die ein Spieler in drei Sekunden abdecken kann. Wenn man von einer mittleren Laufgeschwindigkeit von fünf Metern pro Sekunde ausgeht, kann der Gegner in drei Sekunden einen Kreis mit einem Radius von fünfzehn Metern abdecken. Das entspricht einer Fläche von rund 707 Quadratmetern. Ein mittleres Fußballfeld hat die Maße 68 Meter x 105 Meter, was eine Fläche von 7140 Quadratmetern ergibt – das Zehnfache des Aktionsradius eines Feldspielers.

Nicht jeder Schuss kann ein Treffer sein

Auch die „optimale“ Schussposition auf dem Spielfeld lässt sich mit mathematischen Methoden bestimmen. Ziel ist dabei die optimale Sicht auf das Tor. Mathematisch ausgedrückt heißt das: Es ist nötig, das Tor unter einem möglichst großen Winkel zu sehen – ein geometrisches Problem. Befindet man sich auf der Torauslinie, ist der Sichtwinkel gleich null. Der Winkel geht auch gegen null, je weiter sich der Spieler vom Tor entfernt. Irgendwo zwischen diesen Extremen muss der optimale Schusspunkt liegen. (Darstellung mit weiteren Erklärungen auf Anfrage im Redaktionsbüro erhältlich.)

Der Ball ist nur beinahe rund

Auch bei der Konstruktion von Fußbällen ist Geometrie mit im Spiel. Der klassische Fußball ist ein Körper aus zwölf Fünfecken und zwanzig Sechsecken. Letztere ergeben die bekannteste aller Fußballgeometrien, das abgestumpfte Ikosaeder. Es handelt sich also bei einem Ball nicht wirklich um eine Kugel. Er ist nur annähernd rund. Seit der WM von 1970 rollt der Ball mit den 32 schwarzen und weißen Feldern, den sogenannten Panels, über den Rasen.

Für die WM 2006 wurde dann mit dem neuen Fußball „+TEAMGEIST“ alles anders. Das stellt Matthias Ludwig von der Pädagogischen Hochschule Weinberg fest. Wegen einer neuen patentierten Fertigungsweise, einer thermischen Klebetechnik (Thermal-bonded-Verfahren), ist man nicht darauf angewiesen, die Außenhaut der Bälle zu nähen, sondern kann die Bälle aus vorgeformten Panels auf eine Hülle kleben. Dieses Verfahren macht die Bälle besonders rund, sprung- und flugstabil.

Mathematik für Trainer

Mathematische Kenntnisse können Trainern helfen, die beste Mannschaft aus den im Kader verfügbaren Spielern zusammenzustellen. Denn amerikanische Forscher haben mit einer statistischen Analyse herausgefunden, dass diejenigen Teams am erfolgreichsten sind, die aus einer ausgewogenen Mischung erfahrener und neuer Mitglieder bestehen – ob im Sport, im Management oder in der Forschung.

Neben der richtigen Mannschaftsaufstellung spielt aber auch der Zufall eine wesentliche Rolle auf dem Fußballfeld. Denn zwei Fünftel aller Tore sind Zufallstreffer, fallen also nicht nach planvollen Spielzügen. Für Trainer ist das eine wichtige Botschaft. Denn die Bedingungen für Zufallstreffer lassen sich durchaus gezielt herbeiführen, etwa indem man Unruhe im Strafraum stiftet. Mathematik macht es also möglich, den Zufall als überschaubares Prinzip ins Spiel zu bringen.

Kein Wunder also, dass auffällig viele Fußballaktive einen Mathematikbezug haben. Neben Ottmar Hitzfeld, seines Zeichens Mathematiklehrer, hat Mirko Slomka – Botschafter im Jahr der Mathematik – vor seiner Tätigkeit als Fußballtrainer Mathematik und Sport auf Lehramt studiert. Und auch der ehemalige Bundesligaprofi Knut Reinhardt (288 Spiele für Leverkusen, Dortmund und Nürnberg) ist jetzt Lehramtsanwärter in den Fächern Mathematik und Sport an der Grundschule „Kleine Kielstraße“ in Dortmund. Die Schule ist Gewinnerin des Deutschen Schulpreises 2007 und eine der Kooperationsschulen im Jahr der Mathematik.

Rechenspiele sorgen für Spannung im Fußball

Vor dreizehn Jahren wollte der Fußball-Weltverband die Fußball-Ligen und - Turniere noch attraktiver machen. Um dieses Ziel zu erreichen, ersetzte die FIFA die Zwei-Punkte-Regel durch die Drei-Punkte-Regel. Thomas Hofmeister und seine Mitarbeiter an der Universität Dortmund haben herausgefunden, dass die Drei-Punkte-Regel die Bundesliga tatsächlich spannender gemacht hat – allerdings nur mathematisch gesehen. Weder nahm die Zahl der Unentschieden ab, noch wurden mehr Tore geschossen. Aber die Antwort auf die Frage, ob eine Mannschaft zu einem bestimmten Zeitpunkt während der Saison noch Meister werden kann, ist jetzt nur mit viel Rechenarbeit zu beantworten. Bei der Zwei-Punkte-Regel führte hingegen noch ein einfacher Zahlenhandgriff zur Antwort.

11.2 Neue Weltrekorde in Peking – alles Zufall?

Fußball ist nicht der einzige Sport, in dem Mathematik eine große Rolle spielt. Im Sommer dieses Jahres sind beispielsweise Olympische Spiele in Peking, und sicherlich werden dort neue Weltbestleistungen aufgestellt. Welche Rekorde genau, kann Mathematik natürlich nicht voraussagen. Aber sie kann helfen zu erkennen, welche Mechanismen von Rekord zu Rekord führen. Manchmal ist es der pure Zufall. Das hat zumindest Daniel Gembris vom Forschungszentrum Jülich herausgefunden. Er hat mit drei Kollegen die Entwicklung der Weltbestleistungen in verschiedenen Leichtathletikdisziplinen untersucht und dabei erkannt, dass die Verbesserungen am besten durch die Zufallshypothese erklärt werden, nicht etwa durch technische oder trainingsmethodische Fortschritte.

Besonders interessant wird es natürlich dann, wenn die Zufallsentwicklung bricht. Denn dann müssen außergewöhnliche Faktoren am Werk gewesen sein. Zum Beispiel untersuchen Leonid E. und Aleksei L. Sadovskij in ihrem Buch „Mathematik und Sport“ die Entwicklung des Stabhochsprungweltrekords von den 1950er bis in die 1980er Jahre. Sie beobachten einen langsamen Anstieg der Rekordleistungen. Aber dann geriet die Kurve durcheinander und stagnierte schließlich – bis heute. Ursache war ein einziger Mann: der bis heute unübertroffene Springer Sergej Bubka. Die Ursachen für Brüche in Rekordkurven sind häufig erklärbar, manchmal bleiben sie aber auch im Dunkeln: Neues Material, neue Trainingsmethoden oder neue Bewegungstechniken können Impulse geben.

Trotzdem stößt irgendwann jede Rekordentwicklung an eine unüberwindliche Grenze – das Leistungslimit des menschlichen Körpers. Dann flacht die Rekordkurve ab, sie bekommt die Form einer „exponentiellen Zerfallskurve". Forscher des nationalen französischen Sportinstituts (INSEP/IRMES) haben anhand solcher Kurven abgeschätzt, wann in diversen Disziplinen die Leistungsgrenzen erreicht sein werden. Im 100-Meter-Sprint der Männer werde die letzte Rekordmarke im Jahr 2019 fallen, im Marathon erst sechs Jahrzehnte später. In manchen Phasen jedoch verrutschen die Exponentialkurven wie von Geisterhand, etwa in den 1970er Jahren im Schwimmen – ein Indiz dafür, dass Doping im Spiel gewesen sein könnte.

Mit einem anderen statistischen Verfahren haben die niederländischen Wirtschaftsmathematiker John Einmal und Jan R. Magnus abgeschätzt, welche athletischen Leistungen maximal möglich sind. Sie sagen 9,29 Sekunden für den Sprint und 2 h 04'06" für den Marathon voraus.

11.3 Tennis ist fair – mathematisch bewiesen

In ihrem Buch modellieren die Sadovskijs auch Tennis als stochastischen Prozess und zeigen, dass ein Match mit drei Gewinnsätzen deutlich fairer ist als ein Match mit zwei Gewinnsätzen. Bei einem Stärkeverhältnis von 60:40 zwischen den beiden Spielern gewinnt der stärkere Spieler fast immer, wenn das Match über drei Gewinnsätze geht. Bei nur zwei Gewinnsätzen hingegen hat der Schwächere gute Chancen auf einen Glückssieg.

11.4 Weiter werfen mit Mathematik

Wie schleudert man mit seiner Körperkraft einen Speer so weit wie möglich? Mathematisch gesehen, ist das ein klar definiertes Optimierungsproblem. Aber bringt ein Athlet sein Wurfgerät wirklich auf die ideale Flugbahn, die sogenannte Trajektorie? Ein elektronisches Messsystem, integriert in den Speer, hilft dabei, die Ideallinie zu finden. Es erfasst die Bewegung des Speers während des Anlaufs und des Abwurfs und überträgt die Daten kabellos auf einen Laptop. So lassen sich Würfe haargenau überwachen und Bewegungsabläufe optimieren. Entwickelt hat es das Fraunhofer-Institut für Fabrikbetrieb und -automatisierung IFF in Magdeburg zusammen mit dem Olympiastützpunkt Magdeburg/Halle.

11.5 Effizient zum Gipfel

Mathematik kann auch im wahrsten Sinne des Wortes „über den Berg“ helfen. Am schnellsten lassen sich Höhen natürlich erklimmen, indem man auf geradem Weg aufwärts geht. Wenn es aber sehr steil wird, dann ist der kürzeste Weg nicht der optimale. In diesem Fall ist es besser, im Zickzack zu laufen, um Energie zu sparen. Der Anthropologe Marcos Llobera von der University of Washington und der Mathematiker Tim Sluckin von der University of Southampton haben ein mathematisches Modell entwickelt, um den besten Weg auf den Gipfel zu finden. Basierend auf einer Formel für den menschlichen Stoffwechsel berechneten sie den günstigsten Anstiegswinkel. Dabei erwies sich die Zickzackform als optimal. Demnach sollte man ab einer Steigung von 16 Grad nicht mehr den direkten Weg aufwärts wählen. Bergab empfiehlt sich übrigens bereits ab einem Gefälle von 12,4 Grad der Zickzackkurs.

11.6 Mathematik und Leichtathletik

Wenn sich am 15. August Sportlerinnen und Sportler aus der ganzen Welt zur Leichtathletik-Weltmeisterschaft in Berlin versammeln, ist auch die Mathematik mit am Start. Ob Kugelstoßen oder Hammerwurf, 100 m-Lauf oder Stabhochsprung, die Mathematik entscheidet mit über Sieg oder Niederlage.

Die Mathematik des Kugelstoßens

Beim Kugelstoßen zum Beispiel gilt es, den richtigen Abwurfwinkel zu wählen – und der lässt sich berechnen: der optimale Wurfwinkel würde 45° betragen, wenn die Kugel direkt vom Boden aus starten würde. Nachdem die Abwurfhöhe – je nach Größe und Streckung des Athleten aber höher liegt – erweist sich – je nach Abwurfgeschwindigkeit und Abwurfhöhe – ein Abwurfwinkel zwischen etwa 39° und 42° als optimal. Der Winkel lässt sich für jeden Athleten, jede Athletin sehr genau bestimmen, ist aber von den individuellen Eigenschaften der Sportler, zum Beispiel der Körpergröße, abhängig.

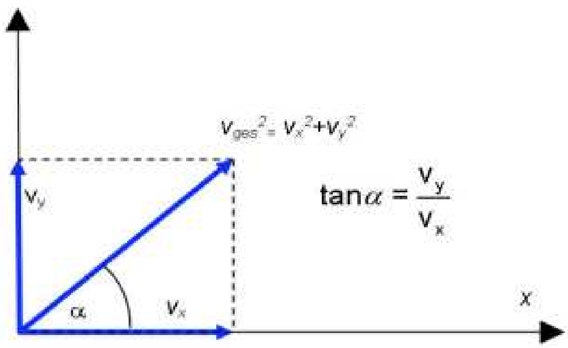

Abb.1: Gut gestoßen: Berechnung des optimalen Abwurfwinkels α beim Kugelstoßen: Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors der Kugel in eine waagrechte Komponente v_x und eine vertikale Komponente v_y. Es gilt: tan α = v_y geteilt durch v_x. Da die Geschwindigkeitskomponenten in horizontaler und vertikaler Richtung gleich sind, ist tan α = v_y geteilt durch v_x = 1. Damit ergibt sich α = 45°.

Steckt die Kugel nach dem Wurf im Rasen, muss korrekt gemessen werden. Je nach (Un)Achtsamkeit des Messpersonals kann es Abweichungen von mehreren Zentimetern geben, die womöglich über einen neuen Weltrekord entscheiden. Daher hat die IAAF (siehe Quellen unten) die Messtechnik genau vorgegeben. Der Grund: es macht mathematisch einen Unterschied, ob (entlang der blauen Linie) zur Vorderkante der Ringmitte gemessen wird, oder ob das Maßband (entlang der roten Linie) über die Ringkante hinaus bis zum Ringmittelpunkt gespannt wird und die Wurfstrecke am Schnittpunkt mit der Ringkante abgelesen wird, siehe Abbildung 2. Die IAAF (siehe Quellen unten) verlangt letzteres.

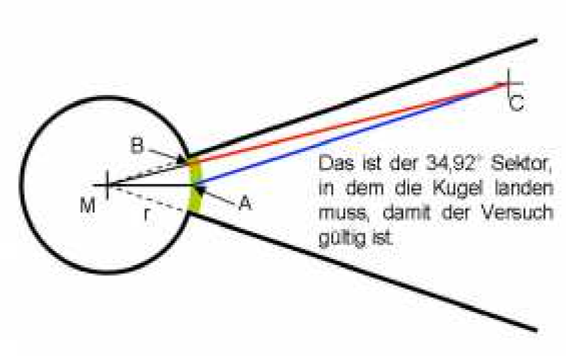

Abb.2: Gut gemessen: Ist die Kugel gestoßen, muss nach IAAF das Maßband entlang der roten Linie über die Ringkante hinaus bis zum Ringmittelpunkt gespannt werden und die Wurfstrecke am Schnittpunkt (B) mit der Ringkante abgelesen werden. M=Mittelpunkt des Wurfkreises, r=Radius des Wurfkreises.

Die Mathematik der Laufrekorde oder: Wann laufen die Frauen so schnell wie die Männer?

Sieht man sich die Weltrekorde der Männer und der Frauen bei verschiedenen Laufdisziplinen an, so stellt man fest, dass sowohl die Männer als auch die Frauen über lange Sicht betrachtet immer schneller laufen. Egal ob es sich um 100 m, 200 m, 400 m, 10.000 m oder den Marathon handelt, die Laufzeiten werden immer kürzer. Trägt man die 100-m-Weltrekorde für Frauen und Männer in ein Diagramm ein (und legt jeweils eine Ausgleichsgerade durch die Werte von Frauen und Männern) dann zeigt sich, dass sich die Weltrekorde bei den Frauen stärker verbessert haben, als bei den Männern, siehe Abbildung 3. Würde sich dieser Trend (linear) fortsetzen (was natürlich nicht wirklich zutrifft), hieße das mathematisch gesprochen: Die beiden Geraden werden sich in der Zukunft in einem Punkt schneiden; dieser Punkt lässt sich selbstverständlich berechnen. Ergebnis: Im Herbst des Jahres 2064 werden die Frauen die Männer mit einer Zeit von knapp 9,19 Sekunden beim 100-m-Lauf eingeholt haben.

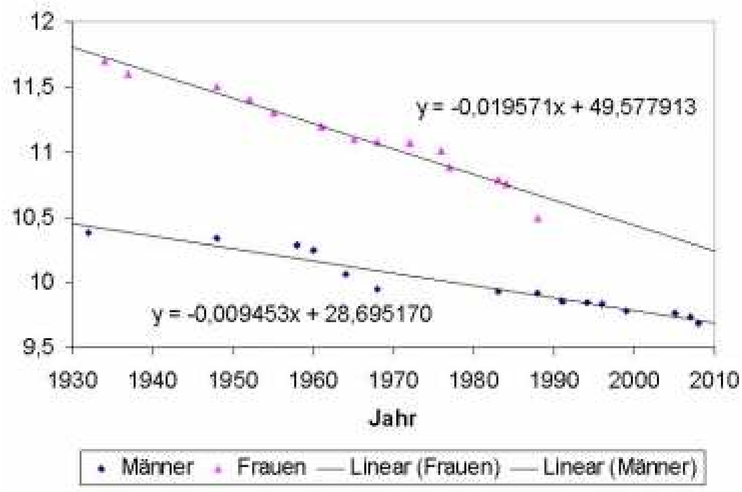

Abb 3: Die Weltrekorde der Frauen (obere Gerade) haben sich in der Vergangenheit beim 100-m-Lauf schneller verbessert, als die der Männer (untere Gerade). Würden sich die Geraden bei der (unwahrscheinlichen) Fortsetzung dieses Trends in Zukunft schneiden, hätten die Frauen die Männer eingeholt. Im Herbst des Jahres 2064 wäre es so weit. Die Steigung der Geraden wird bei den Männern mit -0,009453 angegeben. Das bedeutet, dass sich der 100-m-Weltrekord der Männer pro Jahr um 0,9453 Hundertstelsekunden verbessert. Der Weltrekord der Frauen verbessert sich mit 0,19571 Zehntelsekunden pro Jahr und damit schneller, als der der Männer.

Die Mathematik der Laufbahnen

400-m-Bahn

In den amtlichen Leichtathletik-Bestimmungen des DLV heißt es, die 400-mBahn setze sich aus zwei parallelen Geraden zu je 84,39 m und zwei Halbkreiskurven mit einem Radius von 36,50 m (gemessen an der Außenkante der Laufbahneinfassung) zusammen. Die Bahnen haben – einschließlich eines 5 cm breiten Begrenzungsstreifens –eine Breite von 1,22 m. Es erstaunt, dass die Geraden nicht einfach 100 m lang sind. Und wenn man die o. g. Längenvorgaben zusammenzählt, dann ergibt sich als Länge für die 400-m-Bahn: $2 * 84{,}39 \text{ m} + 2 * 36{,}50 \text{ m} * \pi \approx 398{,}116 \text{ m}$, also nur knapp 400 m (Wir erinnern uns: die Formel für den Kreisumfang $U = 2\,\pi r$, wobei r der Radius ist). Genau 400 m errechnen sich, wenn man ins Kalkül zieht, dass die Athleten nicht exakt entlang der Bahninnenlinie laufen, sondern in einer gewissen Entfernung von dieser. Setzen wir in der Kurve einen Abstand zur Bahninnenlinie von 30,0 cm an, dann erhöht sich die Bahnlänge in der Kurve um 188,5 cm. Das ergibt dann für Bahn 1 die Laufbahnlänge von insgesamt 400,0 m.

Weitere Laufwettbewerbe

Je nach Laufwettbewerb laufen die Athleten auf Ihren Bahnen durch unterschiedlich viele Kurven: Beim 200-m-Lauf durch eine Kurve, beim 400-mLauf durch zwei Kurven, beim 800-m-Lauf durch eine („gezählte“) Kurve (jede weitere ist eine Innenkurve) und bei der 4 * 400 m Staffel durch drei Kurven. Denn beim 200-m-Lauf, beim 400-m-Lauf müssen die Läufer auf ihrer Bahn bleiben. Beim 800-m-Lauf hingegen dürfen sie ihre Bahn nach der ersten Kurve verlassen (bei der der 4* 400m Staffel nach drei Kurven) und streben der (kürzeren) Innenbahn zu. Da die Bahnlängen der Bahnen 2 bis 8 länger sind, als die Länge der Bahn 1, muss die Länge der Bahnen 2 bis 8 beim 200-m-Lauf, beim 400-m-Lauf und bei der 4 *400 m Staffel korrigiert werden. In Anwendung der Formel $Z(m,n) = m * (n-1) * 1{,}22\text{m} * \pi$, wobei m die Anzahl der in Bahnen zu laufenden Kurven ist, n für die Nummer der Laufbahn steht, und 1,22m die Breite einer Laufbahn beträgt, ergeben sich – korrigiert um den Abstand zur Bahninnenlinie –folgende Kurvenvorgaben (Z):

Disziplin	m	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
200 m	1	3,52	7,35	11,18	15,02	18,85	22,68	26,52
400 m	2	7,04	14,70	22,37	30,03	37,70	45,36	53,03
800 m	1	3,53	7,38	11,16	15,15	19,06	22,94	26,93
4 x 400 m	3	10,56	22,09	33,63	45,19	56,76	68,36	79,97

Abb. 4: Kurvenvorgaben für vier verschiedene Laufdisziplinen in Metern. Bei 800m und der 4x400m Staffel gibt es noch zusätzliche Zugaben, da man nach der dritten Kurve auf die Innenbahn laufen darf. Quelle: Matthias Ludwig: Mathematik + Sport.

Zu guter Letzt: Warum das Stadion Stadion heißt

Begonnen hat die Geschichte der 400-m-Bahn schon in der griechischen Antike. Damals benutzte man als Längenmaß das Stadion. Das griechische Stadion betrug 600 Fuß, das spätere römische Stadion 625 Fuß. Das griechische Stadion entsprach – je nach Länge des jeweiligen Fußmaßes – zwischen 177,35 m in Delphi bis zu 192,38 m in Olympia. Die ungewöhnlich große Länge des Stadions in Olympia wird einem Mythos zu Folge dadurch begründet, dass der griechische Herakles mit seinem Riesenfuß diese Länge abgemessen haben soll.

Es handelte sich bei diesen Laufbahnen noch um keine Rundbahn, sondern um eine Strecke, die einfach geradeaus verlief. Über die Distanz von einem Stadion führten die Griechen ihre Laufwettbewerbe durch; später (724 v. Chr.) auch über die Entfernung von zwei Stadien, also je nach Stadionlänge fast 385 m – der 400-m-Lauf war erfunden. Diese Wettkämpfe waren sehr populär und es wurden speziell dafür ganz gerade Laufbahnen mit seitlichen Zuschauerplätzen angelegt.

Ein prominentes Beispiel aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. ist die Laufbahn von Olympia. Man hatte damals links und rechts von der Laufbahn Erdwälle aufgeschüttet, auf denen rund 45.000 Personen Platz hatten, siehe Abbildung. Im Lauf der Zeit kam es zu einer Bedeutungsverschiebung von dem Stadion als reiner Laufbahn hin zur gesamten Anlage. In der Folgezeit wurde das Stadion als Bauwerk immer weiter entwickelt: mit unterschiedlichen Bahnlängen, Rundbahnen und aufwändigen Tribünen für die Zuschauer. Das Stadion in Amsterdam erhielt als erstes Olympiastadion 1928 eine normierte 400-m-Bahn.

Abb. 5: Das antike Stadion in Olympia. Links und rechts von der Laufbahn sind die Zuschauerwälle zu erkennen. Quelle: DRNO GNU Free document licence.

Abb. 6: Das heutige Panathenäische Stadion in Athen ist eine Rekonstruktion für die ersten neuzeitlichen olympischen Spiele 1896. Der Ursprungsbau entstand etwa 330 v. Chr. und hatte bereits damals stufenförmig ansteigende steinerne Sitzreihen. Quelle: Craig Patik, GNU Free document licence.

11.7 Mathe ist fast überall

Diese Beispiele zeigen: Im Sport steckt viel Mathematik. Die Zuschauer bemerken das zwar oftmals nicht. Aber viele Akteure im Sport nutzen die Möglichkeiten der Mathematik bereits, um Leistungen weiter zu verbessern. Angewandte Mathematik macht beispielsweise Rennwagen aerodynamischer, Fahrräder belastbarer und verhilft Yachten wie der des Siegers des America's Cup von 2003 und 2007 mit Hilfe numerischer Optimierungen und starker Rechnerleistung zum Sieg. So wird es mit Hilfe mathematischer Methoden und Erkenntnisse möglich, Sport besser zu verstehen, Erfolge zu erklären oder Leistungen zu verbessern. Und dank Mathematik geraten manchmal sogar altbekannte Weisheiten ins Wanken – zum Beispiel die Überzeugung, der Ball sei rund.

12 Mathematik und Technik

Vermutlich war es der Computer, der die Mathematik aus seinem „Dornengestrüpp von Formeln“ (Konrad Knopp) hervorgeholt hat. Dieses Bild mag die Fantasie nicht sehr beflügeln, doch wurde die Mathematik erst durch den Rechner zur „Königsdisziplin“ der Technologie. Sie hilft seither beispielsweise bei der Herstellung funkelnder Edelsteine, indem sie das, was beim Schleifen entfernt wird, minimiert oder legt Babys trockener, indem sie beim Design moderner Windeln mitwirkt. Sie macht Flugzeuge sicherer, Autos sparsamer, Transistoren kleiner, Rußfilter weniger störanfällig, Datenmengen durchschaubarer und Produktionsanlagen effizienter.

„Die Mathematik heute ist eine springlebendige, charmante und äußerst hilfreiche, eine hübsche Prinzessin. Und das ist kein Märchen, sondern gerade in Deutschland Wirklichkeit, denn die angewandten Mathematiker an den deutschen Universitäten und Forschungsinstituten gehören seit langem zur Weltspitze“, sagt Professor Helmut Neunzert, Begründer des Fraunhofer-Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM und Pionier der angewandten Mathematik in Deutschland.

12.1 Gut verpackt – Mathematik sorgt für eine optimale Behälterfüllung

Wer Kugeln möglichst platzsparend lagern möchte, muss sie nur wie Erbsen in eine Schachtel füllen und daran rütteln – mit guter Näherung bildet sich die dichteste Kugelpackung. Zylinder sind schon widerspenstiger: Selbst flache Münzen liegen lieber wie „Kraut und Rüben“ in der Kiste als in geordneten Schichten. Noch komplizierter wird es bei Kolben, Rohren und anderen Bauteilen, die in der Fertigungsindustrie produziert werden. Da eine optimale Behälterbefüllung bei Transport und Lagerung Geld spart, tüfteln erfahrene Verpackungsplaner mitunter stundenlang, um eine gute Packung von solchen Bauteilen zu finden – meist nach dem Prinzip „Versuch und Irrtum“. Die Ergebnisse sind aber selten so gut wie die aus dem Computer.

Mathematiker konnten eine Software für das optimierte Befüllen von Standardbehältern entwickeln. Neben neuartigen mathematischen Optimierungsalgorithmen verwendet die Software dreidimensionale Modelle der zu packenden Bauteile, so dass der Benutzer der Software auch eine grafische Anleitung für das Packen erhält. Durch die vollständige Berücksichtigung der Bauteilgeometrien lassen sich auch komplexe Teile, wie sie im Fahrzeugbau gelagert und transportiert werden, platzsparend verpacken. Die Software ist dabei auf baugleiche Teile ausgelegt. Das zusammen mit zwei führenden Automobilherstellern entwickelte Programm erzielt verbesserte Packungsdichten von bis zu 20 Prozent – ein Einsparungspotenzial, das sich auf viele Glieder der Logistikkette auswirkt.

12.2 Kraftfahrzeug-Filter direkt aus dem Computer

Moderne Automobile enthalten eine Vielzahl von Filtern zur Reinigung von Luft und Flüssigkeiten. Seit Jahrzehnten werden solche Filter auf Basis von Zellulose hergestellt. Doch mit den traditionellen Filtern lassen sich die Anforderungen der modernen Motorentechnik häufig nicht mehr erfüllen. Automobilzulieferer arbeiten daher mit Hochdruck an der Entwicklung neuer zellulosefreier Filtermedien, die mehr Partikel abscheiden und mehr Schmutz aufnehmen. Um teure und zeitaufwändige Experimente zu vermeiden, arbeiten Forscher an einer Simulationssoftware, mit der sich synthetische Filtermaterialien direkt und interaktiv am Computer entwickeln lassen. Dies verkürzt den Entwicklungszyklus neuer Produkte, was Automobilzulieferern einen Wettbewerbsvorteil bringen kann. Darüber hinaus lässt sich die Produktqualität verbessern und das Materialverhalten beim späteren Einsatz sowie der Lebenszyklus des Filters besser voraussagen.

12.3 Mathematik in der hohen Kunst des Chip-Designs

Als Jack Kilby vor 50 Jahren den ersten Mikrochip baute, nahm er zwei Transistoren, verband sie durch Golddrähte und setzte sie auf eine Schicht Germanium, Vorläufer des Siliziums. Mathematik brauchte der Amerikaner hierfür nicht. Heutige Chips gleichen dagegen „futuristischen Großstädten“ mit Millionen Häusern sowie einem Geflecht von Straßen und Brücken im Miniaturformat. Oft sind mehrere Millionen Transistoren auf nur wenigen Millimetern untergebracht. Mathematiker gehören zu den „Stadtplanern“ dieser Mikrowelten. Je dichter und kleiner die integrierten Schaltungen, desto genauer muss deren Aufbau geplant sein – und dies geht heute nur mit Computern und modernster Mathematik. So kooperiert das Institut für diskrete Mathematik in Bonn seit über 20 Jahren mit einem amerikanischen Chiphersteller. Der Direktor des Instituts, Prof. Dr. Dr. h. c. Bernhard Korte, gilt als einer der Pioniere des mathematischen Chip-Designs. Mit der mathematischen Software aus Bonn wurden bereits über 1000 Chips entworfen. Da die rasante Entwicklung in der Chipherstellung das Chip-Design immer komplizierter macht, werden am Institut für diskrete Mathematik permanent neue und raffiniertere Rechenverfahren entwickelt.

12.4 Mathematik macht große Daten ganz klein – nicht nur in MP3

Manchmal vermag die Mathematik Revolutionen auszulösen: Seit der Entwicklung des MP3-Formats zur Kompression von Audiodaten am Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen IIS in Erlangen ist in der Musikindustrie nichts mehr, wie es einmal war. Spielte ein Walkman mit Audiokassette in den 80er und 90er Jahren bis zu 120 Minuten Musik ab, so fasst die Festplatte eines „iPod“ bis zu 40.000 Songs – Musik für Wochen. Dass auch andere Industrien von mathematischen Verfahren zur Datenkompression profitieren, zeigt eine Software, die speziell für die Automobilindustrie entwickelt wurde: Pro Tag fährt ein virtuelles Modell etwa 100 bis 150 Mal im Rechner gegen die Wand. Da kommen schnell Daten von mehr als 100 Terabytes zusammen. Die Mathematik hilft dabei, solche Datenberge zu verkleinern. Als erster Schritt für die Kompression wird die geometrische Genauigkeit vorgegeben, zum Beispiel 1 Millimeter für Fahrzeugcrashs. Bei diesem „Quantisieren“ nimmt man bewusst einen Datenverlust in Kauf. Alle weiteren Komprimierungsschritte sind verlustfrei, das heißt, die Daten lassen sich wieder 1:1 herstellen. Je nach Anwenderbedarf können sie um den Faktor 10, 7 oder 5 komprimiert werden. Mehrere deutsche Automobilfirmen setzen solche Verfahren ein, um Speicherplatz zu sparen; die komprimierten Daten lassen sich zudem schneller in Grafiken und Videos darstellen.

12.5 Mathematik für mehr Sicherheit – die Simulation der Airbag-Entfaltung

Airbags können bei Unfällen Leben retten. Wenn sie sich aber durch einen Fehlalarm entfalten, können sie auch schlimme Verletzungen verursachen. Daher gibt es strenge Richtlinien für Airbags. Crashtests sind jedoch aufwändig und teuer. Wesentlich effizienter ist die computergestützte Simulation des Entfaltungsvorgangs, gekoppelt mit biomechanischen Modellen, um die Wirkung auf den Menschen zu ermitteln. Bis vor kurzem war der Rechenaufwand für solche Simulationen jedoch unverhältnismäßig hoch. Mathematiker haben daher neue numerische Methoden entwickelt, die die beim Entfalten von Airbags entstehende Strömung hinreichend genau simulieren. Die komplexe Faltungstopologie und die dynamisch stark veränderliche Geometrie von Airbags stellen daher keine unüberwindbaren Hindernisse bei der Berechnung mehr dar.

12.6 Schneller Surfen im Internet – dank Mathematik

Schnelles Surfen im Internet, am besten mit Lichtgeschwindigkeit – diese Vision könnte bald schon Wirklichkeit werden. Da sich Licht schneller als Strom ausbreitet, sind sich Experten sicher, dass die Datenautobahnen der Zukunft aus Glasfasern bestehen. Doch zuvor müssen noch einige Hindernisse überwunden werden. Für solche Glasfaserverbindungen benötigt man zum Beispiel Laserbausteine, die Strom- in Lichtsignale umwandeln können. Diese Bausteine sind heute noch die Schwachstelle der optischen Datenübertragung, denn sie sind langsam und halten dadurch die Datenübertragung auf. Forscher am Berliner Heinrich-Hertz-Institut (HHI) der Fraunhofer-Gesellschaft haben hier zusammen mit Mathematikern einen Durchbruch erzielt. Die Mathematiker entwickelten Software zur Simulation neuartiger Laserbausteine, wodurch auf den Bau vieler Prototypen verzichtet werden konnte und in kürzester Zeit einen neuen Laser entwickeln konnte. Eine Patentanmeldung wurde eingereicht. Bald schon soll die Erfindung fester Bestandteil zukünftiger Hochgeschwindigkeitsdatennetze sein.

12.7 Verformung nach Plan – Mathematik in der Schweißtechnik

Auch die Schweißtechnik profitiert von der Mathematik. Zwar ist das Schweißen seit über 150 Jahren bekannt und wird fortwährend weiterentwickelt. Das Zusammenfügen von Bauteilen mit Hitze und Druck gehört aber immer noch zu den kritischen Schritten im Fahrzeug- und Maschinenbau. Es lässt sich nicht vermeiden, dass sich die Bauteile beim Schweißen verformen. Ein zu großer Schweißverzug macht die Bauteile unbrauchbar. Hier kommt die Mathematik ins Spiel: Mit ihr lässt sich das Schweißen der Bauteile im Computer simulieren, wodurch die Verformungen bereits vor der Fertigung bekannt sind. Mit dieser Information lassen sich die Bauteile so entwerfen, dass der Schweißverzug möglichst klein bleibt. Dies hält den Ausschuss und die Nacharbeiten gering – und spart Kosten. Da die Simulation des Schweißens im Produktionsbetrieb schnell gehen muss, benötigt man allerdings auch schnelle Rechenverfahren. Die Schweißnähte eines meterlangen Bauteils sind bereits so komplex, dass traditionelle Verfahren mehrere Jahre Rechenzeit benötigen. In einem Forschungsprojekt konnte die Rechenzeit um einen Faktor von mehr als 1000 auf wenige Minuten reduziert werden. Beteiligt waren neben Unternehmen aus der Fertigungsindustrie und der Softwareentwicklung Wissenschaftler der

Universität Bayreuth sowie ein forschungsnaher Dienstleister in Bayreuth. Ein großer Fortschritt, geht es doch beim Bau von Eisenbahnen und Flugzeugen um Großbauteile, die mit meterlangen Schweißnähten verbunden sind.

12.8 Mathematik in der Medizintechnik: Optimierung künstlicher Herzklappen durch Simulation von Blutströmungen im Herzen

Wenn es um die Simulation von Blutströmungen im Herzen geht, schlagen auch die Herzen von Mathematikerinnen und Mathematikern höher. Schon allein die Modellierung der Blutgefäße ist eine Herausforderung. Die in der Industrie eingesetzten – kommerziellen – Simulationsprogramme berechnen entweder nur die Strömung von Flüssigkeiten oder die Verformung von Materialien. Doch in unseren Blutbahnen verformt das strömende Blut die Gefäße; Strömung und Verformung müssen gemeinsam berechnet werden. Um diese Wechselwirkung zu berücksichtigen, haben Mathematiker am Fraunhofer-Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI Verfahren zur Kopplung von Simulationsprogrammen entwickelt. Dadurch lassen sich die Strömungsvorgänge und die daraus resultierenden Belastungen von Gewebestrukturen gleichzeitig berechnen. Dies hat zu einer deutlichen Verbesserung der Simulationsergebnisse geführt. Patientinnen und Patienten profitieren durch künstliche Herzklappen, die der Wirklichkeit möglichst nahekommen.

Die Rechenverfahren der Mathematiker lassen sich aber auch zur Simulation der Aero-Elastizität im Flugzeugbau, der Aerodynamik von Automobilen und der Vibrationen in Pipelines verwenden.

13 Mathematik in Verkehr und Logistik

Beim Thema Verkehr ist Deutschland Europameister: Kein anderes Straßen- und Schienennetz ist so dicht wie in Deutschland - und durch kein anderes Land in Europa werden so viele Waren transportiert. Schon heute liegt das jährliche Verkehrsaufkommen allein beim Güterverkehr bei rund 3,7 Milliarden Tonnen (2007). Die Transporte auf Schiene, Straße, Wasser und in der Luft sollen bis zum Jahr 2050 auf über 5,5 Milliarden Tonnen jährlich anwachsen. Doch nicht nur Güter werden bewegt, sondern auch Personen: Die Bahn befördert täglich rund 5 Millionen Menschen; neben den fast 400.000 Lkws des gewerblichen Güterverkehrs sind mehr als 45 Millionen Pkws und fast 4 Millionen Motorräder in Deutschland angemeldet. Besonders viele davon sind zur Ferienzeit in Deutschland und Europa unterwegs.

Dies macht Verkehr und Logistik nicht nur zu einem wichtigen Wirtschaftszweig, sondern auch zu einem fruchtbaren Feld für Mathematiker. Da das Schienen- und Straßennetz nicht im gleichen Tempo wachsen kann wie der Verkehr, muss die vorhandene Infrastruktur möglichst effizient (und umweltschonend) genutzt werden. Eine enorme Herausforderung, bedenkt man die Größe des Verkehrsnetzes und den Einfluss auf den Verkehr. Mathematische Modelle können helfen, die Verkehrsströme zu analysieren, wirksame verkehrspolitische Maßnahmen zu finden und neue Produkte zu entwickeln, die Staus und damit teure Wartezeiten vermeiden.

13.1 Logistikbranche ist drittgrößter Wirtschaftszweig in Deutschland

Viele Innovationen in der Logistik entstehen unsichtbar für die Öffentlichkeit. Zwar ist die Logistikbranche mit rund 2,6 Millionen Beschäftigten nach dem Handel und der Automobilindustrie der drittgrößte Wirtschaftszweig in Deutschland. Die rund 60.000 Logistikunternehmen haben 2007 etwa 204 Milliarden Euro Umsatz gemacht, was 8,4 Prozent des Bruttoinlandsprodukts (BIP) entspricht. Die Verkehrslogistik produziert aber keine eigenen Güter – denn eigentlich ist sie „nur“ Folge einer arbeitsteiligen, produzierenden Wirtschaft und hat das Ziel, einen reibungslosen Transport von Rohstoffen, Produkten und Personen zu garantieren. Da der Konkurrenzdruck steigt und eine immer effizientere Planung und Organisation nötig werden, suchen viele Unternehmen die Zusammenarbeit mit Mathematikern. Die deutsche Logistikbranche, die in Europa als führend gilt, hat ihren Wettbewerbsvorteil sicher auch mathematischen Methoden zu verdanken.

An vielen mathematischen Instituten wird an Fragen aus Verkehr und Logistik geforscht, beispielsweise am Berliner DFG-Forschungszentrum MATHEON und an den Universitäten Bayreuth und Göttingen. Aber auch viele Logistik- und Verkehrswissenschaftler haben Mathematik studiert oder wenden mathematische Methoden an, darunter Prof. Dr. Herbert Knopfer von der Universität Bremen und Prof. Dr. Kai Nagel von der Technischen Universität Berlin.

Dieses Dossier stellt beispielhaft Projekte vor, die die Bedeutung der Mathematik für Verkehr und Logistik zeigen.

13.2 Navigationssysteme zur Verkehrslenkung und -optimierung

Viele Autofahrer schwören auf ihr Navigationssystem: Anstatt das Ziel mühsam auf der Karte zu suchen, gibt man es einfach ins „Navi“ ein und lässt sich von einer freundlichen Stimme leiten. Doch oft genug landet man im Stau. Liegt das Verkehrsaufkommen über der Straßenkapazität, ist das unvermeidbar. Aber viele Staus entstehen auch dadurch, dass viele Autofahrer ähnliche Ausgangs- und Zielpunkte haben und sie durch ein „Navi“ auf denselben Weg gelenkt werden. Damit dies nicht passiert, wird vielerorts fleißig geforscht. Mathematiker der Technischen Universität Berlin untersuchen etwa, wie man Navigationssysteme zur intelligenten Verkehrslenkung einsetzen kann. Im Rahmen eines BMBF-Forschungsprojekts haben die Mathematiker zusammen mit einem Automobilhersteller Verfahren entwickelt, die den Verkehr auf verschiedene Wege verteilen und so zur Staureduzierung beitragen.

Dazu müssen die Navigationssysteme allerdings „weniger egoistisch rechnen“ und auch das Gemeinwohl im Blick behalten. Um Staus zu vermeiden, müssen sich einige der Fahrer mit längeren Routen zufriedengeben (andere haben Glück und dürfen den schnellsten Weg nehmen). Schon heute verwenden Navigationssysteme mathematische Methoden, um kürzeste Wege in Verkehrsnetzen schnell und effizient zu berechnen. Einige Systeme berücksichtigen auch aktuelle Staumeldungen. Die Berliner Mathematiker haben die bislang verwendeten Modelle so angepasst, dass jedem Fahrer eine Toleranzgrenze zugeordnet wird. Mathematisch heißt das, dass das Optimierungsproblem um zusätzliche Nebenbedingungen ergänzt wird, die Umwege für einzelne Autofahrer erlauben. Durch die Toleranzgrenze wird aber garantiert, dass nur Umwege von akzeptabler Länge vorgeschlagen werden.

13.3 Intelligente Verkehrslenksysteme mit Hilfe der Spieltheorie

Die Umsetzung eines intelligenten Verkehrslenksystems ist freilich noch Zukunftsmusik. Simulationen belegen, dass eine intelligente Verkehrslenkung nur möglich ist, wenn die Auswirkungen des Verhaltens jedes Einzelnen berücksichtigt werden. Das Ziel ist dabei, ein Systemoptimum zu erreichen, bei dem ein möglichst großer Verkehrsfluss realisiert wird. Wenn jeder Nutzer die für ihn günstigste Route wählt – was heute die Regel ist –, kann dieses Systemoptimum nicht erreicht werden. Hierbei stellt sich zwar auch ein Gleichgewicht ein; dies ist in der Spieltheorie als Nash-Gleichgewicht bekannt. In diesem Gleichgewicht treten aber seltsame Effekte auf, z. B. das Braess-Paradox: Der Bau einer neuen Straße kann zu einer höheren Netzbelastung führen. Solche Effekte machen Verkehrslenkung zu einem interessanten Gebiet, in dem Mathematik, Spieltheorie und Verkehrsplanung auf spannende Weise ineinandergreifen.

13.4 Mathematische Methoden reduzieren Wartezeiten der liegen gebliebenen Autofahrer und sparen Pannenfahrzeuge ein

Nicht nur zur Urlaubszeit ist die Pannenhilfe auf deutschen Autobahnen ein wichtiges Thema. Während sich Einsatzpläne für Busse und Bahnen vorab planen lassen, gehen bei den Pannenhilfen permanent Anfragen ein - bei großen Anbietern mehrere Tausend pro Tag. Bei fast jeder Anfrage müssen die Disponenten die Routen der

Pannenfahrzeuge umplanen. Dies geschieht meist noch in Handarbeit. Dabei wird selten das Optimum erreicht. Mit mathematischen Methoden lassen sich die Wartezeiten der liegen gebliebenen Autofahrer deutlich reduzieren und Pannenfahrzeuge einsparen.

Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei der Pannenhilfe um eine Variante des berühmten Problems des Handlungsreisenden. Die Pannenfahrzeuge müssen wie Vertreter eine Tour durch vorgegebene Orte machen. Es gibt jedoch zwei Unterschiede: Die nächsten Einsatzorte ergeben sich meist erst, wenn die Pannenfahrzeuge schon unterwegs sind, und es sind mehrere Pannenfahrzeuge im Einsatz, damit die Wartezeiten der Kunden nicht zu lang werden. Die drei größten Verkehrsvereine Deutschlands haben zusammen mehr als 6.000 Pannenfahrzeuge im Einsatz, hinzu kommen die Flotten der Autofirmen und kleinere Anbieter. Die Mitglieder des Verbands europäischer Automobilclubs (ARC-Verband) haben rund 13.000 Mitarbeiter in den Hilfezentralen - bei insgesamt mehr als 10.000 Einsatzfahrzeugen und 15.000 Partnerfirmen mit eigenen Fahrzeugen.

Da die Pannenanfragen nicht schon bei Planungsbeginn feststehen, bezeichnet man die Einsatzplanung der Pannenfahrzeuge auch als Online-Problem. Hier sind Optimierungsverfahren gefragt, die trotz unvollständiger Information über die Zukunft Lösungen von nachweislich hoher Qualität liefern. Am einfachsten wäre es, eine eingehende Pannenanfrage von der Service-Einheit in nächster Nähe des Einsatzortes bedienen zu lassen. Eine solche Zuweisung ist aber in den seltensten Fällen optimal, da sie keinen Ausgleich zwischen den Service-Einheiten schafft und dadurch einzelne Pannenfahrzeuge womöglich überbucht. Durch diesen „naiven“ Ansatz können Wartezeiten der Kunden daher unnötig ansteigen.

Die Mathematiker am Zuse-Institut Berlin haben ein ausgeklügeltes Verfahren entwickelt, das eine nahezu optimale Lösung des Zuweisungsproblems liefert. Ein erster Ansatz war, zunächst die „Offline-Variante“ des Problems zu lösen. Hierbei wird das Zuweisungsproblem unter Kenntnis der bisher eingegangenen Pannenanfragen aber unter Vernachlässigung der noch zukünftigen Anfragen optimal gelöst. Auf diese Art und Weise kann ein optimaler Planungsschnappschuss generiert werden. Diese „kurzsichtige“ Lösung wird immer dann aktualisiert, wenn neue Pannenanfragen eingehen. Hierdurch entsteht eine Abfolge von optimalen Planungsschnappschüssen, die sich über die Zeit hinweg den aktuellen Pannenanfragen anpassen. Mittlerweile wird das Optimierungsverfahren bereits in der Praxis eingesetzt.

13.5 Dispositions- und Konfliktmanagement für eine pünktliche Bahn

Mit dem Gemeinschaftsprojekt "Dispositions- und Konfliktlösungsmanagement für eine pünktliche und wirtschaftliche Bahn" zur Optimierung des Bahnverkehrs hat sich die Göttinger Mathematikerin Anita Schöbel Ende letzten Jahres hervorgetan. Ziel des Projekts war es, die Verspätungen der Bahn besser in den Griff zu bekommen. Bei einem Schienennetz von 34.000 Kilometern und täglich 33.000 Zügen lassen sich Verspätungen zwar nicht verhindern, aber deren Auswirkungen sind möglichst klein zu halten. So können die Mitarbeiter in den Betriebszentren der Deutschen Bahn entscheiden, ob ein Anschluss warten soll – oder pünktlich abfahren muss, um nicht andere Verspätungen zu verursachen. Auch können Überholmanöver oder die Verlangsamung einzelner Züge sinnvoll sein.

Anita Schöbel, die mehrere Jahre am Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) in Kaiserslautern geforscht hat, konnte mathematische Verfahren entwickeln, mit denen sich Verspätungen automatisiert bewerten und Folgemaßnahmen richtig auswählen lassen. Bislang greifen die Mitarbeiter der Deutschen Bahn beim Disponieren der Züge auf feste Wartezeitregeln zurück. Schöbels Modell berücksichtigt eine Vielzahl von Einflussgrößen und stellt sie auf eine mathematische Basis. Ihr Verfahren ist so angelegt, dass es die Summe aller Verspätungen minimiert. Das hilft zwar nicht jedem Bahnfahrer, denn einzelne werden weiterhin Pech haben und große Verspätungen in Kauf nehmen müssen. Im Durchschnitt fahren aber alle besser damit.

Neben der Deutschen Bahn und der Mathematikerin Anita Schöbel sind auch Verkehrswissenschaftler aus Aachen und Dresden an dem Projekt beteiligt. So wurde das Eisenbahnbetriebslabor der Technischen Universität Dresden verwendet, um die neuen mathematischen Verfahren zu testen. Das Labor birgt eine Miniaturanlage mit einer Streckenlänge von 1.600 Metern, auf denen 100 Züge im Echtzeitbetrieb fahren können. Nach geglückten Tests im Labor können Feldversuche in den Betriebszentralen der Deutschen Bahn erfolgreich durchgeführt werden.

13.6 Mit Mathematik gegen Wirbelschleppen im Flugverkehr

In der Reisezeit steuern immer mehr Deutsche Nah- und Fernziele mit dem Flugzeug an. Aus dem modernen Geschäftsverkehr ist das Flugzeug auch nicht mehr wegzudenken. Prognosen der europäischen Flugsicherungsorganisation EuroControl zu Folge wächst der Flugverkehr über Europa um 5 Prozent pro Jahr; die Anzahl der Flüge soll sich in den kommenden 20 Jahren verdoppeln. Viele Flughäfen in Europa stoßen aber heute schon an ihre Kapazitätsgrenzen. Bremsschuh für mehr Starts und Landungen pro Stunde ist unter anderem ein physikalisches Phänomen: die Wirbelschleppen anfliegender Flugzeuge und die daraus resultierenden Sicherheitsabstände nachfolgender Maschinen.

Die Luftwirbel hinter Flugzeugen entstehen als Folge des an den Tragflächen erzeugten Auftriebs; sie können sich als unsichtbare Wirbelschleppen noch längere Zeit entlang der Flugbahn halten. Für die zivile Luftfahrt sind genaue Sicherheitsabstände vorgeschrieben, die eine der wesentlichen Ursachen für die heutigen Kapazitätsbegrenzungen an Flughäfen sind. Daher wird das Entstehen und Zerfallen von Wirbelschleppen derzeit in interdisziplinären Projekten genau untersucht und auch in mathematische Modelle überführt. Bestimmende Parameter sind zum Beispiel der Flugzeugtyp, die jeweilige Flugbahn und die Wetterverhältnisse. Ziel der Simulationen ist, einerseits Bereiche mit hoher Wirbelschleppengefahr vorherzusagen und andererseits dort, wo nur kurz Wirbelschleppengefahr besteht, Starts und Landungen rascher aufeinander folgen zu lassen.

13.7 Optimierter Personennahverkehr am Beispiel der Berliner Verkehrsbetriebe

Obwohl die Anfänge einer mathematischen Verkehrsplanung über 50 Jahre zurückliegen, konnten sich anspruchsvolle Methoden der mathematischen Optimierung erst in den 1990er Jahren durchsetzen. Daran waren der Berliner Mathematiker Martin Grötschel und seine Arbeitsgruppe maßgeblich beteiligt. Grötschel, der seit 1991 Mathematikprofessor an der Technischen Universität Berlin und Vizepräsident des Zuse-Instituts in Berlin ist, hat nicht nur die Theorie der mathematischen Optimierung vorangebracht, sondern auch bahnbrechende Praxisprojekte initiiert. Bekannt geworden ist er unter anderem durch ein gemeinsames Projekt mit den Berliner Verkehrsbetrieben, bei dem er die Planung des Busverkehrs optimiert hat.

Das Berliner Bussystem ist so groß, dass sich Grötschel mit seinen Berechnungen regelmäßig am Rande dessen bewegt hat, was Computer heute leisten können: Bei etwa 28.000 Busfahrten pro Tag ergeben sich – wenn bestmögliche Buseinsatzpläne errechnet werden sollen – Optimierungsprobleme mit über 100 Millionen Variablen. Diese gigantischen „ganzzahligen Mehrgüter-Flussprobleme“ mit traditionellen Methoden zu lösen, wäre aussichtslos. Selbst die schnellsten Supercomputer bräuchten hierfür zu lang. Doch Grötschel und seine Mitarbeiter konnten neue Methoden der ganzzahligen Optimierung entwickeln, die auf die Besonderheiten der Busumlaufplanung angepasst sind. Dadurch ließen sich die Computerberechnungen – allein durch intelligentere Rechenverfahren – so weit beschleunigen, dass sie heute weltweit im Einsatz sind.

13.8 Weniger Schulbusse durch Optimierung der Schulanfangszeiten

Dass einfache Ideen bereits überraschend große Einsparungen ermöglichen, haben Mathematiker aus Darmstadt gezeigt. Ihr Steckenpferd ist der Schulbusverkehr, der speziell in ländlichen Gegenden ein echtes logistisches Problem darstellt. Da traditionell alle Schulen zur selben Zeit mit dem Unterricht beginnen, werden alle Schulbusse zur gleichen Zeit benötigt, was enorme Kosten verursacht. Die Idee der Mathematiker: Lässt man die Schulen zu verschiedenen Zeiten beginnen, kann jeder Bus noch einen weiteren Schulstandort erreichen. Dabei werden zunächst die Schüler zur Schule mit frühem Unterrichtsbeginn gebracht und in einer weiteren Runde die Schüler zur Schule mit späteren Anfangszeiten.

Dieser Ansatz klingt simpel, führt jedoch zu einem komplexen mathematischen Modell, weil gegenseitige Abhängigkeiten zwischen Entscheidungen bestehen. Ein Beispiel: Liefert Busfahrt B seine Fahrschüler erst eine Stunde nach Schulbeginn von Schule S ab, so ist die Lösung offensichtlich unbrauchbar. Diese Abhängigkeiten von Entscheidungen werden in mathematische Gleichungen und Ungleichungen übersetzt. Modelliert man auf diese Weise den Busverkehr und die Schulen eines gesamten Landkreises, so kommt man schnell auf einige 10.000 Unbekannte und ebenso viele Nebenbedingungen.

Um die Schulanfangszeiten und den öffentlichen Personennahverkehr optimal aufeinander abzustimmen, wurde am Fachgebiet Diskrete Optimierung der Technischen Universität Darmstadt das Optimierungsprogramm „Integrierte Koordinierung von Schulanfangszeiten und des Nahverkehrsangebots“ entwickelt. Praxisauswertungen, die auf Datensätzen in Nordrhein-Westfalen, Mecklenburg-Vorpommern und Sachsen-Anhalt durchgeführt wurden, verdeutlichen das Einsparpotenzial: Es konnten jeweils zwischen 12 % und 27 % der eingesetzten Busse eingespart werden, im günstigsten Fall jeder vierte Bus. Da die Gemeinden den Schulbusverkehr mit rund 30.000 Euro pro Bus unterstützen, sind bundesweit Einsparungen von mehreren Millionen Euro pro Jahr möglich. Hinzu kommt noch das entsprechende CO_2-Einsparpotenzial.

14 Mathematik in Wetter- und Klimavorhersage

Wie das Wetter wird, interessiert fast jeden. Scheint die Sonne? Regnet es? Wie hoch steigt das Quecksilber? Die Wettervorhersage beeinflusst, was wir am nächsten Tag anziehen oder unternehmen. Doch die Prognose beeinflusst weitaus mehr. So hängen Flugpläne und Schifffahrtsrouten, aber auch die Planungen in der Landwirtschaft bis zu denen im Katastrophenschutz von Wetter- und Klimavorhersagen ab. Und auch in viele andere Entscheidungen der Wirtschaft und auch Politik reichen sie hinein. Eines ist diesen Prognosen gemein: Sie sind alle auch das Ergebnis umfangreicher mathematischer Modellrechnungen.

14.1 Wettervorhersage

Um das zukünftige Wetter vorhersagen zu können, muss man erst das aktuelle kennen. Deshalb werden Daten über Niederschlagsart und -menge, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck, Temperaturen sowie Windrichtungen und -geschwindigkeiten gesammelt. Ohne Mathematik könnten die Wetterdaten aus aller Welt kaum erfasst und verarbeitet werden. In Deutschland registriert der Deutsche Wetterdienst (DWD) Daten über ein Messnetz mit rund 180 hauptamtlichen und über 2.500 nebenamtlichen Klima- und Niederschlagsstationen. An den hauptamtlichen Stationen werden jede Stunde Messwerte abgelesen, bei den nebenamtlichen nur um 7, 14 und 21 Uhr. Dazu kommen rund 1.500 weitere Beobachtungsstellen nach dem internationalen Standard der Weltorganisation für Meteorologie (WMO). Hier wird zwischen Bodenbeobachtungsstationen zur Datengewinnung an der Erdoberfläche und so genannten aerologischen Stationen unterschieden, welche meteorologische Daten aus der Atmosphäre bis in eine Höhe von rund 30 Kilometern liefern. Diese Informationen sind für die Betrachtung der dreidimensionalen Struktur des Wetters unerlässlich. Mobile Messstationen – Schiffe, driftende Bojen, Flugzeuge – ergänzen die stationären Messungen.

Der DWD sammelt alle Daten zentral im hessischen Offenbach, prüft sie mehrfach, bereitet sie auf und tauscht sie mit den nationalen Wetterdiensten aller Mitgliedsstaaten der WMO aus. Dann gehen die Daten in die Wettervorhersagemodelle ein.

Eine Wettervorhersage entsteht nach konkret aufeinanderfolgenden Schritten: Zunächst legen die Meteorologen im Computer ein Dreiecksgitter über die Erdkugel. Dieses reicht in Schichten in die Atmosphäre hinein. Aus dem vorhandenen Datenmaterial werden dann für die Punkte auf dem Gitter unter anderem (Anfangs-)Werte für Temperatur, Feuchte, Druck, Windrichtung und Windgeschwindigkeit ermittelt. Aus diesen Anfangswerten wird (Zeit-)Schritt für (Zeit-)Schritt berechnet, wie sich das Wetter zeitlich in die Zukunft hinein entwickelt. Diese Berechnungen erfolgen mit Hilfe mathematischer Gleichungssysteme, die den Kern des Wettermodells bilden und auf den physikalischen Grundprinzipien der Erhaltung von Masse, Energie und Impuls beruhen.

Das Ergebnis dieser aufwändigen Modellierungs- und Rechenvorgänge nimmt später in den Abendnachrichten gerade mal eine Minute ein. Tatsächlich greifen die Medien nur einen sehr kleinen Teil der durch die modernen Verfahren der Wettervorhersage bereitgestellten Informationen auf. Ein weitaus größerer Teil wird unter anderem vom Luft-verkehr, von der Seeschifffahrt, der Katastrophenvorsorge sowie der Land- und Forstwirtschaft genutzt.

14.2 Vom Wetter zum Klima

Besonders schwierig ist die Vorhersage langfristiger Trends. Wie entwickeln sich Temperaturen, Meeresströmungen, Eisbedeckung und Regenfälle in den kommenden Jahrzehnten? Am 12. September 2008 zum Beispiel bestimmten Wissenschaftler des Alfred-Wegener-Instituts für Polar- und Meeresforschung (AWI) die Eisbedeckung in der Arktis. Sie betrug 4,5 Millionen Quadratkilometer. Dies ist etwas mehr als die niedrigste jemals beobachtete Bedeckung von 4,1 Millionen Quadratkilometern aus dem Jahr 2007. Dennoch sorgen sich Wissenschaftler um die Meereisentwicklung, denn das langjährige Mittel liegt 2,2 Millionen Quadratkilometer höher. Völlig unerwartet kam die Entwicklung jedoch nicht. Eine Modellrechnung im Frühsommer aus dem Alfred-Wegener-Institut hatte gezeigt, dass das Eisminimum 2008 mit fast hundertprozentiger Sicherheit unter dem von 2005 liegen würde.

Ein anderes Beispiel: Klimaforscher des Potsdam-Instituts für Klimafolgenforschung (PIK) warnten kürzlich erneut vor der Gefahr eines beschleunigten Meeresspiegelanstiegs. Selbst eine Halbierung der globalen Treibhausgas-Emissionen bis 2050 berge ein hohes Risiko, dass die globale Mitteltemperatur um mehr als zwei Grad Celsius über vorindustrielles Niveau steige. Und eine Umfrage des PIK unter führenden Klimawissenschaftlern aus dem Forschungsbereich „Atlantische Ozeandynamik“ ergab im vergangenen Jahr, dass sie eine spürbare Veränderung der Wasserzirkulation im Nordatlantik noch in diesem Jahrhundert befürchteten – mit zahlreichen Auswirkungen: Der Meeresspiegel im Nordatlantik würde um bis zu einen Meter steigen, das marine Ökosystem würde gestört und die weltweite Niederschlagsverteilung verändert, so das PIK.

Klimaprognosen werfen – anders als kurzfristige Wettervorhersagen – auch politische Fragen auf, wie zum Beispiel: Wenn sich die Erde erwärmt, ist das dann vom Menschen verursacht oder eine natürliche Erscheinung? Auf welches Klima müssen wir uns in Zukunft einstellen? Wie kann man dem Trend entgegenwirken?

Die Beantwortung dieser Fragen ist so komplex, dass sich Wissenschaftler mehrerer Disziplinen an der Klimaforschung beteiligen. Neben Mathematikern und Meteorologen (den „Physikern der Erdatmosphäre“) gehören auch Biologen, Agrarwissenschaftler, Wirtschaftswissenschaftler, Meeres- und Polarforscher sowie Soziologen dazu. Denn zahlreiche Faktoren und nicht zuletzt das Verhalten des Menschen haben Einfluss auf das Klima und werden gleichzeitig vom Klima beeinflusst.

Zur Prognose des Klimas haben die Forscher Modelle erstellt und entwickeln sie ständig weiter. Heutige Klimamodelle bestehen meist aus mehreren Einzelmodellen, die miteinander gekoppelt sind. Sie bilden die Subsysteme des Klimasystems ab, zum Beispiel die Atmosphäre und den Ozean. Diese beiden gelten zugleich als die wichtigsten Subsysteme, denn in ihnen laufen hochdynamische Zirkulationsprozesse ab, die in komplexer Weise aufeinander einwirken: Ein Atmosphärenmodell muss zahlreiche Parameter abbilden, zum Beispiel Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchtigkeit, Windsysteme und Wolken sowie deren Dynamik und deren Wechselwirkungen rund um den Globus. Ein Ozeanmodell erfasst unter anderem die Wassertemperatur des Oberflächenwassers und der tieferen Wasserschichten, den Eisen- und Salzgehalt und die Meeresströmungen.

14.3 Mathematik als gemeinsame Sprache

Die gemeinsame Grundlage aller Wetter- und Klimamodelle ist die Mathematik. „Für die interdisziplinäre Arbeit brauchen wir einfach eine gemeinsame Sprache, und die präziseste, die wir haben, ist die Mathematik“, sagt Ruprecht Klein, Mathematikprofessor an der Freien Universität Berlin und einer der bedeutendsten Klimaforscher in Deutschland. 2003 erhielt er für seine bahnbrechenden Arbeiten den Leibniz-Preis der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die höchstdotierte wissenschaftliche Auszeichnung der Republik. Für Rupert Klein ist die mathematische Grundlagenforschung ein Weg, um die Ideen der einzelnen Wissenschaften zu einer gemeinsamen Theorie zusammenzuführen und so präzisere Wetter- und Klimamodelle zu entwickeln. Denn nur wenn alle relevanten Einflüsse berücksichtigt werden, lassen sich die Simulationen verbessern und noch bessere Vorhersagen machen.

Die Datenmengen und mathematischen Probleme der Meteorologen lassen sich nur mit Hilfe von Computern verarbeiten. „Man kann sicher sagen, dass der Wunsch nach genaueren Wetter- und Klimamodellen die Entwicklung der Großrechner und der Rechenverfahren beschleunigt hat“, sagt Ulrich Trottenberg, Leiter des Fraunhofer-Instituts für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen (SCAI) und Mathematikprofessor an der Universität zu Köln. Deutschlands modernster Klimarechner befindet sich am Deutschen Klimarechenzentrum in Hamburg. Er wird gerade zu einem der leistungsfähigsten Supercomputer für wissenschaftliche Zwecke ausgebaut. Die Wissenschaftler des Klimarechenzentrums erstellen hochkomplexe Modelle, um den Klimawandel und seine Auswirkungen noch genauer vorhersagen zu können.

Jede Innovation in der Computertechnik verlangt die Entwicklung neuer oder die Anpassung bekannter Rechenverfahren. Und jede neue Rechnergeneration eröffnet die Chance, die Wetter- und Klimamodelle weiter zu verfeinern – und so noch genauere Vorhersagen zu treffen.

Mit dem Einsatz von Supercomputern wurde die Mathematik in der Meteorologie immer wichtiger: Die einstige „praktische Wetterkunde“ hat sich im Laufe der Jahre zu einer mathematischen Wissenschaft entwickelt. Viele Mathematiker gehen davon aus, dass Meteorologie und Klimaforschung für die Mathematik eine ähnlich große Rolle spielen wird wie die Physik im 20. Jahrhundert. Deren Erkenntnisse wie die Relativitätstheorie, die Quantenmechanik und die Stringtheorie haben immer neue mathematische Theorien und Erkenntnisse stimuliert.

14.4 Mehrgitter- und Mehrskalenverfahren

Eine der wichtigsten mathematischen Methoden in der Wetterforschung ist das so genannte Mehrgitterverfahren. Mit ihm lassen sich komplexe Gleichungssysteme näherungsweise lösen. Das Mehrgitterverfahren setzt bei der Gitterstruktur an, die zur Berechnung von Wettervorhersagen verwendet wird. Das ursprünglich feinmaschige Gitter wird schrittweise vergröbert. Auf dem weitmaschigsten Netz lassen sich die Gleichungen schnell lösen. Mit ausgeklügelten mathematischen Techniken lassen sich diese Lösungen nun auf die feineren Gitter übertragen – solange, bis auf dem feinsten Gitter eine Näherungslösung für das Ursprungsproblem erreicht ist. Dieses Verfahren scheint kompliziert, ist aber schneller und besser als der direkte Versuch, eine Lösung für das feinmaschige Netz zu finden.

Mit einem ähnlichen System arbeiten die so genannten Mehrskalenverfahren, die seit Mitte der 1990er-Jahre an Bedeutung gewinnen. Sie berechnen die unterschiedlichen Wetterphänomene mit spezialisierten Methoden und kombinieren die Einzelergebnisse dann zu einer übergreifenden Lösung. Gerade in der Meteorologie werden die Mehrgitter und Mehrskalenverfahren große Fortschritte möglich machen – auch unabhängig von der Leistungssteigerung bei Computern.

14.5 Der Schmetterlingseffekt

Zu den Pionieren der computergestützten Meteorologie zählte der amerikanische Mathematiker und Meteorologe Edward Lorenz, der im April 2008 im Alter von 90 Jahren verstorben ist. Lorenz entdeckte den so genannten Schmetterlingseffekt: Der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien kann theoretisch einen Tornado in Texas auslösen. Anfang der 1960er-Jahre experimentierte Lorenz mit Computersimulationen einfacher Wettermodelle und fand dabei heraus, dass kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen zu großen Verschiebungen beim Wetterverlauf führen können. Lorenz legte damit eine wichtige Grundlage in der Chaos-Theorie. Die Modelle der Chaos-Forschung liefern noch heute wertvolle Ansätze, um Wetterdaten zu interpretieren und die langfristige Vorhersagbarkeit von Wetter und Klima zu erforschen.

14.6 Herausforderungen der Zukunft

Der Wunsch, das Wetter zu verstehen, ist alt. Bereits vor etwa 250 Jahren versuchten Wissenschaftler, eine „Wetterformel" zu finden. 1750 stellte der Göttinger Klimaforscher Tobias Mayer eine erste Gleichung vor. Er ging jedoch von falschen Annahmen aus und hatte Schwierigkeiten, die physikalischen Vorgänge in der Atmosphäre mathematisch zu beschreiben. Dieses Problem ist heute gelöst. Der große Fortschritt – und die große Errungenschaft – der Mathematik während der vergangenen Jahrzehnte besteht eben darin, die Vorgänge in der Erdatmosphäre sehr präzise in mathematische Gleichungen umsetzen zu können.

Um Wetter und Klima zu beschreiben, sind komplizierte und vielschichtige Systeme mit partiellen Differentialgleichungen nötig. Die Klimaforscher haben die Vorgänge in der Erdatmosphäre zwar im Prinzip verstanden, aber das dazugehörige mathematische

Modell ist viel zu komplex und die Rechnungen sind noch zu aufwändig. Deshalb sind die Mathematiker noch immer auf der Suche nach einem vereinfachten Wetter- und Klimamodell. Gebraucht werden „abgespeckte“ Gleichungen, die noch immer die wesentlichen Eigenschaften der Erdatmosphäre beschreiben, aber leichter zu analysieren und zu berechnen sind.

Problematisch bei der Wettervorhersage ist, dass die relevanten Phänomene so unterschiedlich groß sind – und zwar in Hinblick auf Ort und Zeit. Wolkenformationen bilden sich im Laufe mehrerer Stunden und können sich über tausende Kilometer erstrecken. Ein Gewitter braut sich dagegen innerhalb weniger Minuten zusammen und ist meist auf einen Umkreis von wenigen Kilometern beschränkt. Blitz und Donner sind sogar so „klein“, dass sie selbst durch das engmaschige Netz der Wetterstationen des Deutschen Wetterdienstes „hindurchrutschen“. Beim so genannten lokalen Modell beträgt die Maschenweite 2,8 Kilometer (Modell COSMO-DE), was aber immer noch größer ist als der Umfang eines Gewitters.

Möchte man derart unterschiedliche Wetterphänomene in einem mathematischen Modell kombinieren, braucht man für einige der Erscheinungen einfache „Ersatzmodelle“. Sonst wird das Gesamtmodell zu komplex. Dabei schleichen sich aber Ungenauigkeiten ein. Der Mathematiker Rupert Klein forscht unter anderem daran, möglichst gute Ersatzmodelle zu finden und den Fehler, den solche Modelle erzeugen, möglichst präzise abzuschätzen. Für eine schnelle und zuverlässige Wettervorhersage für mehrere Tage bleibt also noch viel zu tun – und für die Klimaprognose der kommenden Jahrzehnte ohnehin.